

FAKTORENANALYSE ALS OPTIMIERUNGSPROBLEM

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des
akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Dr. rer. pol.)
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

vorgelegt von
Diplom-Handelslehrer
RAIMUND WILDNER
aus
Hof/Saale

1984



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546221_0006

FAKTORENANALYSE ALS OPTIMIERUNGSPROBLEM

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Dr. rer. pol.)
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

vorgelegt von

Diplom-Handelslehrer Raimund Wildner
aus Hof/Saale

Referent: Prof. Dr. H. Schneeberger
Korreferent: Prof. Dr. G. Buttler

Promotionstermin: 17. Juli 1984

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Statistik II der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

Dem Inhaber dieses Lehrstuhls, Herrn Prof. Dr. H. Schneeberger, danke ich sehr herzlich für den gewährten wissenschaftlichen Freiraum und für die vielfältige Unterstützung, die er der Arbeit zuteil werden ließ.

Ein herzliches Dankeschön auch dem Korreferenten der Arbeit, Herrn Prof. Dr. G. Buttler, der sich zur Korrektur eines derart spröden Themas bereit erklärt hat.

Zu Dank verpflichtet bin ich auch den Herren Dipl.-Sozw. Dr. F. Bauer, Dipl.-Math. O. Haß und Dipl.-Math. P. Wolf, die in vielen Gesprächen zur Klärung wichtiger Fragen beigetragen haben. Stets hilfsbereit erwiesen sich auch meine Kollegen, Herr Dipl.-Kfm. Dr. J. Pöllot und Herr Dipl.-Volksw. D. Malske. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

INHALTSVERZEICHNIS

Vorbemerkungen

1.	Grundlagen	S. 1
1.1.	Das Modell der Faktorenanalyse	S. 1
1.1.1.	Das lineare Grundmodell	S. 1
1.1.2.	Interpretation der Faktorladungen	S. 5
1.2.	Die Standardisierung der Variablen	S. 6
1.3.	Die Anzahl der gemeinsamen Faktoren	S. 8
1.3.1.	Darstellung des Problems	S. 8
1.3.2.	Möglichkeiten der Bestimmung der Anzahl der gemeinsamen Faktoren	S. 10
1.4.	Minimaleigenschaft der Hauptkomponenten	S. 13
2.	Verfahren mit nicht positiv-semidefiniter Restmatrix $R_h - AA'$	S. 17
2.1.	Problemstellung	S. 17
2.2.	Die iterierte Hauptfaktorenmethode und die Minres-Methode	S. 18
2.2.1.	Problemstellung	S. 18
2.2.2.	Darstellung des Verfahrens der iterierten Hauptfaktorenmethode	S. 19
2.2.3.	Gleichwertigkeit der iterierten Hauptfaktorenmethode und der Minres-Methode	S. 21
2.2.4.	Beweis der Konvergenz der iterierten Hauptfaktorenmethode	S. 22
2.2.5.	Die iterierte Hauptfaktorenmethode als Gradientenverfahren	S. 30
2.3.	Kanonische Faktorenanalyse und Maximum-Likelihood Faktorenanalyse	S. 33

2.3.1.	Kanonische Faktorenanalyse	S. 33
2.3.2.	Maximum-Likelihood Faktorenanalyse	S. 36
2.4.	Alpha-Faktorenanalyse	S. 37
2.5.	Vereinheitlichte Darstellung als Eigenwertproblem	S. 40
2.6.	Vereinheitlichte Darstellung als Minimierungsproblem gewichteter Quadratsummen	S. 44
2.7.	Über die Eindeutigkeit der Faktorenlösungen	S. 45
2.7.1.	Problemstellung	S. 45
2.7.2.	Notwendige Voraussetzung für die Eindeutigkeit	S. 46
2.7.3.	Iterierte Hauptfaktorenlösung und Minres-Lösung	S. 46
2.7.3.1.	Der Fall dreier Variabler	S. 46
2.7.3.2.	Beispiel für multiple Minima im Innern des zulässigen Bereichs	S. 54
2.7.4.	Maximum-Likelihood Faktorenanalyse	S. 56
2.7.5.	Alpha-Faktorenanalyse	S. 57
3.	Verfahren mit positiv semi-definiter Restmatrix $\underline{R}_h - \underline{A}\underline{A}'$	S. 58
3.1.	Problemstellung	S. 58
3.2.	Bestehende Verfahren	S. 58
3.2.1.	Die Methode des minimalen Rangs	S. 58
3.2.2.	Die Methode von Guttman	S. 59
3.2.3.	Image-Faktorenanalyse	S. 62
3.2.4.	Minimum-Trace und Constrained Minimum-Trace Faktorenanalyse	S. 63
3.2.4.1.	Das Minimierungsproblem	S. 63
3.2.4.2.	Eigenschaften des Minimierungsproblems	S. 65
3.2.4.2.1.	Konvexität des zulässigen Bereichs und Eindeutigkeit der Lösung	S. 65

3.2.4.2.2.	Untere Schranken für die Kommunalitäten	S. 66
3.2.4.3.	Beurteilung	S. 71
3.3.	Die Minvar-Lösung der Faktorenanalyse	S. 72
3.3.1.	Grundgedanke	S. 72
3.3.2.	Die Zielfunktion und ihre Eigenschaften	S. 73
3.3.3.	Algorithmus zur Bestimmung der Minvar-Lösung	S. 78
3.3.3.1.	Untauglichkeit bestehender Verfahren	S. 78
3.3.3.2.	Herleitung eines neuen Rechenverfahrens	S. 80
3.3.3.3.	Überprüfung des Algorithmus an empirischen Korrelationsmatrizen	S. 85
3.3.4.	Über die Eindeutigkeit der Minvar-Lösung	S. 87
4.	Vergleich der Verfahren	S. 88
4.1.	Problemstellung und Konzeption des Vergleichs	S. 88
4.2.	Vergleich durch Beispiele	S. 88
4.3.	Vergleich durch Simulation	S. 94
4.3.1.	Konzeption des Vergleichs	S. 94
4.3.2.	Vorgehensweise	S. 94
4.3.3.	Ergebnisse	S. 96
4.4.	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	S. 101

Anhang: Programm zur Berechnung der Minvar-Lösung

Literaturverzeichnis

Lebenslauf

VORBEMERKUNGEN

Die Faktorenanalyse ist eine weit verbreitete Methode zur Strukturierung umfangreicher Datensätze. Vor allem die iterierte Hauptfaktorenmethode, die Maximum-Likelihood- und die Alpha-Methode sind heute über Programmpakete wie SPSS scheinbar problemlos anwendbar.

Die Probleme liegen i.a. auch nicht bei der praktischen Rechnung, wohl aber in den Methoden selbst. Einige Probleme und Lösungsmöglichkeiten aufzuzeigen, ist das Anliegen dieser Arbeit.

Hierfür wird ein in der Literatur wenig beachteter Ansatz gewählt:

Ziel der Faktorenanalyse ist eine "möglichst gute" Erklärung der Korrelationen eines Datensatzes durch wenige Faktoren. Diese "möglichst gute" Anpassung soll durch geschickte Wahl der Faktorladungen und der Kommunalitäten erreicht werden. Diese müssen aber gewisse Bedingungen erfüllen, die durch das Modell geboten sind. Offensichtlich kann die Faktorenanalyse demnach als Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen aufgefaßt werden.

Unter diesem Aspekt lassen sich die bekannten Verfahren in zwei Gruppen einteilen:

Die erste Gruppe versucht eine optimale Erklärung der Korrelationen, beachtet aber nicht die erforderlichen Nebenbedingungen. Dies sind die eingangs erwähnten Verfahren; sie werden nach der Darlegung der Grundlagen im 1. Kapitel im 2. Kapitel behandelt. Hier erweist sich der gewählte Ansatz als fruchtbar: Mit seiner Hilfe kann gezeigt werden, daß die iterierte Hauptfaktorenmethode stets konvergiert und daß die genannten Verfahren nicht not-

wendig eindeutige Lösungen haben.

Die zweite Gruppe beachtet die erforderlichen Nebenbedingungen, erreicht aber i.a. keine optimale Erklärung der Korrelationen. Diese in der Praxis wenig verwendeten Verfahren werden im 3. Kapitel dargestellt.

Die Stärken beider Gruppen vereinen soll die Minvar-Methode der Faktorenanalyse. Dieses Verfahren wird in dieser Arbeit neu vorgestellt und erzielt als einziges eine optimale Erklärung der Korrelationen unter Beachtung der erforderlichen Nebenbedingungen.

Der Vergleich im 4. Kapitel zeigt, daß die Minvar-Methode gegenüber den Verfahren des 2. Kapitels eine bessere Interpretation des Ergebnisses ermöglicht, aber auch mehr Rechenzeit erfordert. Bezüglich der Stabilität der Lösung erweisen sich die Verfahren in einer Simulationsrechnung als gleichwertig.

Mit dieser kurzen Inhaltsübersicht ist gleichzeitig angedeutet, welche Probleme ausgeklammert wurden. So sind insbesondere die konfirmatorische Faktorenanalyse und das Rotationsproblem nicht behandelt. Diese Abgrenzung erfolgte im Interesse einer kompakten und in sich geschlossenen Darstellung.

Die Bezeichnungsweise ist an Überla (1971) als dem wohl am weitesten verbreiteten deutschsprachigen Buch über die Faktorenanalyse angelehnt. Matrizen sind durch unterstrichene Großbuchstaben, Vektoren durch unterstrichene Kleinbuchstaben dargestellt. Die Einheitsmatrix ist durch "I" symbolisiert, "0" ist je nach Zusammenhang eine Nullmatrix oder ein Nullvektor, "diag" kennzeichnet eine Diagonalmatrix.

KAPITEL 1: GRUNDLAGEN

1.1. Das Modell der Faktorenanalyse

1.1.1. Das lineare Grundmodell

Ziel der Faktorenanalyse (FA) ist eine Variablenreduktion: Die Zusammenhänge zwischen m Variablen, die an n Testeinheiten gemessen wurden, sollen auf weniger, nämlich $r < m$, nicht direkt meßbare Variablen, die sogenannten Faktoren, zurückgeführt werden. Das bekannteste Beispiel eines Faktors ist der Intelligenzquotient, der sich ja auch aus einer Vielzahl von Testergebnissen ergibt. Dies war historisch gesehen auch der Ausgangspunkt und die erste Anwendung der FA. (Spearman 1904)

Das Modell der FA, wie es sich heute allgemein durchgesetzt hat, geht auf L. L. Thurstone (1931, 1947) zurück. Es soll mit einer Änderung in Matrixschreibweise dargestellt werden:

$$\underline{Z} = \underline{B} \cdot \underline{P} + \underline{U} \cdot \underline{Q} \quad (1.1.)$$

Dabei ist:

$\underline{Z} = m \times n$ - Matrix der als standardisiert angenommenen Variablen mit

n = Anzahl der Merkmalsträger

m = Anzahl der Variablen

$\underline{B} = m \times s$ - Matrix der Faktorladungen mit

s = Anzahl der gemeinsamen Faktoren, die zur vollständigen Erklärung von $\underline{Z}$ nötig sind.

Im Gegensatz hierzu:

$\underline{A} = m \times r$ - Matrix der ersten r Spalten von $\underline{B}$ mit

r = Anzahl der gemeinsamen Faktoren, die tatsächlich extrahiert werden.

Im allgemeinen gilt: $r < s$.

Diese Unterscheidung dient der Klarheit und ist die oben erwähnte Änderung des Modells von Thurstone.

$\underline{P} = s \times n$ - Matrix der Werte der gemeinsamen Faktoren.

$\underline{U} = m \times m$ - Matrix der Einzelrestfaktoren. Einzelrestfaktoren wirken auf nur eine Variable. Folglich ist $\underline{U}$ Diagonalmatrix.

$\underline{Q} = m \times n$ - Matrix der Werte der Einzelrestfaktoren.

Beim Modell der Hauptkomponentenanalyse entfallen die Matrizen $\underline{U}$ und $\underline{Q}$; freilich gilt dann i.a.: $s=m$.

Die Matrizengleichung (1.1) stellt ein Gleichungssystem von $n \times m$ Gleichungen dar, wobei $m \times s + n \times s + m + n \times m$ Unbekannte in den Matrizen $\underline{B}$, $\underline{P}$, $\underline{U}$ und $\underline{Q}$ und nur $n \times m$ Bekannte in $\underline{Z}$ enthalten sind.

Damit das Modell zumindest teilweise geschätzt werden kann, verzichtet man zunächst auf eine Schätzung von $\underline{P}$ und $\underline{Q}$, (die Schätzung von $\underline{P}$ kann später nachgeholt werden) nimmt aber die Faktoren als standardisiert und jeweils zueinander orthogonal an. Folgende Annahmen werden also getroffen (wobei $N := 1/(n-1)$):

1. Die gemeinsamen Faktoren sind standardisiert und paarweise orthogonal, d.h.

$$N \cdot \underline{P} \cdot \underline{P}' = \underline{I} \quad (1.2.)$$

2. Die Einzelrestfaktoren sind standardisiert und paarweise orthogonal, d.h.

$$N \cdot \underline{Q} \cdot \underline{Q}' = \underline{I} \quad (1.3.)$$

3. Die Einzelrestfaktoren und die gemeinsamen Faktoren sind paarweise orthogonal, d.h.

$$N \cdot \underline{P} \cdot \underline{Q}' = \underline{0} \quad (1.4.)$$

Mit (1.1) bis (1.4.) läßt sich bilden:

$$\begin{aligned} \underline{N} \cdot \underline{Z} \underline{Z}' &= \underline{N} \cdot (\underline{B} \underline{P} + \underline{U} \underline{Q}) \cdot (\underline{B} \underline{P} + \underline{U} \underline{Q})' = \\ &= \underline{B} \underline{N} \underline{P} \underline{P}' \underline{B}' + \underline{B} \underline{N} \underline{P} \underline{Q}' \underline{U}' + \underline{U} \underline{N} \underline{Q} \underline{P}' \underline{B}' + \underline{U} \underline{N} \underline{Q} \underline{Q}' \underline{U}' = \\ &= \underline{B} \underline{B}' + \underline{U}^2 \end{aligned}$$

Da $\underline{N} \underline{Z} \underline{Z}'$ die Korrelationsmatrix $\underline{R}$ ergibt, folgt das Fundamentaltheorem von Thurstone:

$$\underline{R} = \underline{B} \underline{B}' + \underline{U}^2 \quad (1.5.)$$

oder mit $\underline{R}_h = \underline{R} - \underline{U}^2$:

$$\underline{R}_h = \underline{B} \underline{B}' \quad (1.6.)$$

Die sogenannte "reduzierte Korrelationsmatrix" $\underline{R}_h$ ist also die Matrix, bei der die Diagonalglieder der Korrelationsmatrix $\underline{R}$ um das Quadrat der jeweiligen Einzelrestfaktorladung verringert wurde. Die Diagonalglieder von $\underline{R}_h$ werden als "Kommunalitäten" h_i^2 bezeichnet.

Ein Test der Annahmen (1.2.) bis (1.4.) ist weder sinnvoll noch möglich. Entgegen der Ansicht von Steiger (1979) ist es auch nicht so, daß aus der Geltung von (1.5.) bzw. (1.6.) die Annahmen (1.2.) bis (1.4.) folgen würden¹⁾.

Wohl folgt aus (1.6.) die Annahme (1.2.), denn

$$\underline{R}_h = \underline{B} \cdot \underline{N} \underline{P} \underline{P}' \cdot \underline{B}' \rightarrow$$

$$(\underline{B}' \underline{B})^{-1} \cdot \underline{B}' \cdot \underline{R}_h \cdot \underline{B} \cdot (\underline{B}' \underline{B})^{-1} = \underline{N} \cdot \underline{P} \underline{P}'$$

¹⁾ Auf dieses Problem hat mich Herr Prof. Dr. H. Schneeberger aufmerksam gemacht.

ergibt mit (1.6.):

$$\underline{N} \cdot \underline{P} \underline{P}' = \underline{I}$$

(Die Existenz von $(\underline{B}'\underline{B})^{-1}$ darf vorausgesetzt werden, da $\underline{B}$ bei allen Faktorextraktionsmethoden stets vollen Rang hat.)

(1.3.) und (1.4.) sind jedoch für die Geltung von (1.6.) nicht notwendig. Eine notwendige Bedingung ergibt sich unter Verwendung von (1.2.) wie folgt:

$$\underline{R} = \underline{B} \underline{B}' + \underline{B} \underline{N} \underline{P} \underline{Q}' \underline{U}' + \underline{U} \underline{N} \underline{Q} \underline{P}' \underline{B}' + \underline{U} \underline{N} \underline{Q} \underline{Q}' \underline{U}'$$

Wird $\underline{U}$ als nichtsingulär vorausgesetzt, so ist dies gleichwertig mit:

$$\underline{N} \cdot \underline{Q} \underline{Q}' = \underline{I} - (\underline{U}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{N} \cdot \underline{P} \underline{Q}' + (\underline{U}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \underline{N} \cdot \underline{P} \underline{Q}')')$$

Aus jeder Matrix der Kovarianzen der Einzelrestfaktoren mit den gemeinsamen Faktoren folgt also in eindeutiger Weise die Kovarianzmatrix der Einzelrestfaktoren mit sich selbst, sofern $\underline{U}$ nicht singulär ist. Insbesondere gilt für $\underline{P} \underline{Q}' = \underline{0}$: $\underline{N} \underline{Q} \underline{Q}' = \underline{I}$.

Das Fundamentaltheorem ist der Ausgangspunkt der Faktorenanalyse. Damit ergeben sich folgende Probleme, die in enger Wechselwirkung stehen:

1. Die Anzahl der zu extrahierenden gemeinsamen Faktoren r muß bestimmt werden.
2. Die Kommunalitäten sind zu schätzen.
3. Das Faktorisiertierungsproblem: $\underline{B}$ ist hinsichtlich einer orthogonalen Rotation unbestimmt. Sei $\underline{T}$ eine $s \times s$ -Matrix mit $\underline{T} \underline{T}' = \underline{I}$, so ist mit $\underline{B}$ auch $\underline{C} = \underline{B} \underline{T}$ Lösung von (1.6.), denn $\underline{C} \underline{C}' = \underline{B} \underline{T} \underline{T}' \underline{B}' = \underline{B} \underline{B}' = \underline{R}_h$. Es müssen also zusätzliche Bedingungen eingeführt werden.

1.1.2. Interpretation der Faktorladungen

Die Faktorladungen können auf zwei verschiedene Weisen interpretiert werden, die für die folgenden Kapitel wichtig sind. Beide Interpretationen finden sich z.B. bei Thurstone (1947, S. 72 und S. 89).

1. Interpretation:

Die Faktorladung $a_{i\rho}$ ($i=1(1)m$, $\rho=1(1)s$) ist gleich dem Korrelationskoeffizienten zwischen der Variablen i und dem Faktor ρ .

Da Variable und Faktoren zentriert und standardisiert und alle Faktoren zueinander orthogonal sind, läßt sich nämlich schreiben:

$$r(\text{Variable } i; \text{Faktor } \rho) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n z_{ij} \cdot p_{\rho j} =$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\sigma=1}^s a_{i\sigma} \cdot p_{\sigma j} + u_i \cdot q_{ji} \right) p_{\rho j} = a_{i\rho}$$

$$\text{da } \sum_{j=1}^n p_{j\rho} p_{j\sigma} = 0 \text{ für } \rho \neq \sigma \text{ und } \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n p_{j\rho}^2 = 1$$

2. Interpretation:

Die Varianz der Variablen i , die durch den Faktor ρ erklärt wird, ist $a_{i\rho}^2$.

Denn es ist wegen (1.2.) bis (1.4.):

Varianz der Variablen i =

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n z_{ij}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\rho=1}^s a_{i\rho} \cdot p_{\rho j} + u_i \cdot q_{ji} \right)^2 = \\ &= \sum_{\rho=1}^s a_{i\rho}^2 + u_i^2 \end{aligned}$$

Beide Interpretationen lassen sich auch für die Einzelrestfaktorladungen herleiten.

Dem faktoranalytischen Modell angemessen sind also nur Ladungen, für die gilt:

$$-1 \leq a_{i\rho} \leq 1 \text{ bzw. } -1 \leq u_i \leq 1 \quad (1.7a)$$

Oder:

$$0 \leq a_{i\rho}^2 \leq 1 \text{ bzw. } 0 \leq u_i^2 \leq 1 \quad (1.7b)$$

Und damit auch:

$$0 \leq h_i^2 \leq 1 \quad (1.7c)$$

für alle $i=1(1)m$, $\rho=1(1)s$

Es wird sich zeigen, daß bei den am häufigsten verwendeten Methoden der FA die Bedingungen bezüglich der Einzelrestfaktorladungen wohl beachtet werden, nicht aber die Bedingungen bezüglich der Faktorladungen der gemeinsamen Faktoren. Diese Methoden werden im 2. Kapitel untersucht. Im 3. Kapitel werden dann Methoden dargestellt, die alle genannten Bedingungen beachten.

1.2. Die Standardisierung der Variablen

Vor einer FA werden i.a. die Daten standardisiert, um ihre Abhängigkeit vom Maßstab zu beseitigen. Deshalb wird nicht mit der Kovarianzmatrix, sondern mit der Korrelationsmatrix gerechnet. In diesem Zusammenhang soll hier noch kurz auf ein Problem eingegangen werden, das meines Wissens in der faktoranalytischen Literatur noch nicht behandelt wurde: Während die Stichprobenkovarianz ein erwartungstreuer Schätzer der Kovarianz der Grundgesamtheit ist, gilt gleiches für den Korrelationskoeffizienten nicht. Um einen Eindruck von der Grössenordnung der Verzerrung zu gewinnen, wurde der Er-

wartungswert des Stichprobenkorrelationskoeffizienten r unter der Annahme einer bivariaten Normalverteilung der Grundgesamtheit und in Abhängigkeit vom Korrelationskoeffizienten ρ der Grundgesamtheit bestimmt.

T.W. Anderson (1958, S.69) zitiert die Dichte von r . Die zitierte Formel ist bereits für einen Stichprobenumfang von $n=80$ einer numerischen Berechnung nicht mehr zugänglich. Nach einiger Rechnung erhält man hieraus folgende Form, die für $|\rho| < .95$ auch noch für $n=150$ ausgewertet werden kann:

$$f(r) = \frac{n-1}{\pi} \cdot 2^{0.5} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+0.5} \right) \cdot (1-\rho^2) \cdot (1-r\rho)^{-2.5} \cdot \left(\frac{(1-r^2)^{0.5}}{1-\rho r} \right)^{n-3} \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^j \frac{1+r\rho}{2k} \cdot \frac{(k-0.5)^2}{n+k-0.5} \right)$$

Damit läßt sich mit Hilfe numerischer Integration die Verzerrung berechnen (s. Abb. 1. Die Werte für $\rho < 0$ ergeben sich durch Reflexion am Ursprung.)

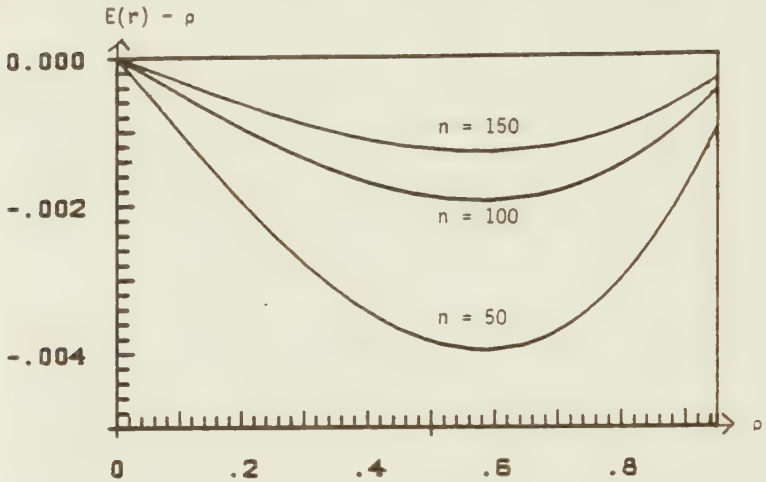
Demnach läßt sich folgendes feststellen:

1. Für $\rho=0$ tritt keine Verzerrung auf. Gleiches gilt für $|\rho|=1$, weil auch die Stichprobenwerte auf einer Geraden liegen müssen, wenn dies für die Werte der Grundgesamtheit gilt.
2. Für $n > 50$ macht sich die Verzerrung erst in der dritten Nachkommastelle bemerkbar.
3. Eine Beispielrechnung an einer 8×8 -Korrelationsmatrix (Harman 1970 S.147) ergab bei einem Stichprobenumfang von $n=50$, daß sich die Verzerrung erst in der dritten Nachkommastelle bei den unrotierten Faktorladungen auswirkt.

Die Verzerrung durch die Standardisierung der Variablen kann also vernachlässigt werden.

Abbildung 1:

Die Verzerrung des Korrelationskoeffizienten bei normalverteilter Grundgesamtheit



Quelle: Eigene Berechnungen

1.3. Die Anzahl der gemeinsamen Faktoren

1.3.1. Darstellung des Problems

Das Fundamentaltheorem von Thurstone setzt voraus, daß so viele Faktoren extrahiert werden, wie der Rang von R_h ist. Der Rang von R_h sei s . Von Ledermann (1937) stammt der Beweis, daß, abhängig von der Wahl der Kommunalitäten, s zwischen folgenden Grenzen liegt:

$$s_{\min} \leq s \leq m \quad (1.8a)$$

wobei $s_{\min}$ die kleinste ganze Zahl ist, die folgende Ungleichung erfüllt:

$$s_{\min} \geq m + 0.5 - 0.5 \cdot (8 \cdot m + 1)^{0.5} \quad (1.8b)$$

Diese Zahl heißt "minimaler Rang" von $\underline{R}$. Freilich kann es sein, daß dieser nur durch Kommunalitäten, die (1.7c) nicht erfüllen, erreicht wird. Tabelle 1 zeigt beispielhaft $s_{\min}$ in Abhängigkeit von m .

Tabelle 1:

Mindestrang $s_{\min}$ von $\underline{R}_h$ in Abhängigkeit von der Variablenzahl m .

m	3	5	10	20	30	50	100
$s_{\min}$	1	3	6	15	23	41	87

Quelle: Eigene Berechnungen.

Die Möglichkeit der Datenreduktion ist also besonders für große Variablenzahl sehr beschränkt. Andererseits läßt sich erfahrungsgemäß bereits mit einer kleinen Anzahl von Faktoren $\underline{R}_h$ sehr gut durch $\underline{AA}'$ annähern.

Es muß also eine Faktorenzahl r gefunden werden, so daß einerseits eine deutliche Reduktion der Zahl der Variablen erfolgt, andererseits aber eine "gute" Modellanpassung erreicht wird.

Bei früheren Faktorenanalysen wurden die Faktoren meist sukzessive extrahiert, bis $\underline{R}_h$ hinreichend durch $\underline{AA}'$ angenähert war. Freilich setzte dies Kommunalitätenschätzungen vor der eigentlichen Analyse voraus.

Heute geht man meist den umgekehrten Weg: Die Anzahl der (gemeinsamen) Faktoren muß vor der eigentlichen Analyse bekannt sein. Das Verfahren liefert

dann neben den Faktorladungen auch Kommunalitätenschätzungen. Dieser Weg wird auch bei dem in dieser Arbeit neu vorgestellten Verfahren begangen. Deshalb sollen hier kurze Hinweise zur Bestimmung von r vor der Berechnung von $\underline{A}$ gegeben werden.

1.3.2. Möglichkeiten der Bestimmung der Anzahl der gemeinsamen Faktoren

Für die Bestimmung von r gibt es im wesentlichen folgende Möglichkeiten:

1. A-priori-Wissen aufgrund der fachwissenschaftlichen Kenntnis des Untersuchungsgegenstandes.

Ein wichtiges Beispiel aus der psychologischen Schätzpraxis hierzu ist die Auswertung von Datensätzen semantischer Differentiale. Hier besteht die - nicht unumstrittene - Hypothese, daß jeweils drei Faktoren extrahiert werden können. (Vgl. hierzu z.B. Osgood 1969, Heise 1969)¹⁾

2. Untersuchung der Korrelationsmatrix

a) Der Scree-Test (Cattell 1966):

Man zeichnet die Eigenwerte der Korrelationsmatrix der Größe nach geordnet in ein Diagramm. In der Verbindungskurve ist häufig ein Knick festzustellen. Es werden nur soviele Faktoren extrahiert, wie Eigenwerte links von diesem Knick liegen.

¹⁾ Dieses Beispiel und die Literatur dazu verdanke ich Herrn Dr. Felix Bauer, Nürnberg.

Eine Modifikation von Horn (1965) vermeidet nur scheinbar die Subjektivität des Scree-Tests:

Es wird eine $n \times m$ - Matrix unabhängiger und normalverteilter Zufallszahlen gebildet und daraus die Matrix der Zufallskorrelationen errechnet. Das Eigenwertdiagramm von Matrizen von Zufallskorrelationen ist flach, das von empirischen Korrelationsmatrizen meist steil abfallend. Horn schlägt vor, so viele Faktoren zu extrahieren, wie die zu untersuchende Korrelationsmatrix Eigenwerte hat, die über den entsprechenden Eigenwerten der Matrix der Zufallskorrelationen liegen. Zumindest für kleine n ist das Ergebnis in hohem Maße vom verwendeten Zufallszahlengenerator und vom Startwert abhängig.

b) Statistische Tests:

Als Beispiel einer Vielzahl statistischer Tests zur Bestimmung der Anzahl von Faktoren (vgl. z.B. Pawlik 1976, S.167ff) sei hier der Bartlett-Test (Bartlett, 1950, 1951) zitiert. Bartlett hat gezeigt, daß die Testgröße

$$B = -\left(n - \frac{2m+5}{6} - \frac{2r}{3}\right) \ln \left[\prod_{i=r+1}^m l_i / \left(\frac{1}{m-r} \sum_{i=r+1}^m l_i \right) \right]$$

für große Stichprobenumfänge n ungefähr χ^2 -verteilt ist mit $0.5 \cdot (m-r+2) \cdot (m-r-1)$ Freiheitsgraden, wobei l_i der i -te der der Größe nach in absteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerte der Korrelationsmatrix $\underline{R}$ ist. Übersteigt B einen vorgegebenen Wert, so ist r zu erhöhen.

Diesem Test liegt das gleiche Prinzip wie dem Scree-Test zugrunde (Horn und Engström, 1979), liefert aber eindeutige Ergebnisse. Aus mehreren Gründen können er und andere Tests dennoch nicht empfohlen werden:

Speziell der Bartlett-Test berücksichtigt nicht die Änderung, die durch die Verwendung von Kommunalitäten entsteht.

Zwei weitere Kritikpunkte betreffen alle Tests zur Bestimmung der Anzahl der Faktoren:

Durch eine Folge von Tests mit verschiedenem r wird das Ergebnis verfälscht, da die einzelnen Tests voneinander abhängig sind. Schließlich führen bei großen Stichproben alle Tests regelmäßig zu überhöhtem r (Revenstorf 1976, S.219). Dies bestätigt die Ansicht Cattells (1958), daß ein Variablensatz i.a. mehr gemeinsame Ursachen als Variable hat.

Deshalb ist auch Jöreskog (1978) in seiner Ansicht zuzustimmen, wonach das Ziel der Faktorenanalyse "eine vernünftige Näherung der Kovarianzmatrix der Grundgesamtheit ist. ... Von diesem Gesichtspunkt aus ist das statistische Problem nicht, eine gegebene Hypothese zu testen (die a priori als falsch angesehen werden kann), sondern eher ein Problem der Anpassung mit verschiedener Parameterzahl und der Entscheidung, wann die Anpassung ausreichend ist." (Übersetzung vom Verfasser)

Genau dies wird aber über den unter 3. aufgezeigten Weg erreicht, ohne den Umweg über den Test einer Hypothese, die von vornherein als falsch betrachtet werden muß.

c) Das Kaiser Kriterium (Kaiser und Dickmann 1962):

Es werden soviele Faktoren extrahiert, wie die Korrelationsmatrix Eigenwerte größer eins hat. Von Guttman (1954) stammt der Beweis, daß der Rang von R_h mindestens ebenso groß ist.

d) Guttman hat 1954 vorgeschlagen, soviele Faktoren zu extrahieren, wie R_h positive Eigenwerte hat, wenn in die Diagonale von R die multiplen Korrelationskoeffizienten als Kommunalitäten eingesetzt werden. Er hat weiter gezeigt, daß mindestens so-

viele Faktoren wie nach dem Kaiser-Kriterium extrahiert werden und daß der Rang von R_h mindestens ebenso groß ist.

3. Man extrahiert soviele Faktoren, wie nach einer Rotation gerade noch sinnvoll interpretiert werden können. Dies bedingt, daß u.U. mehrere Faktorenanalysen mit verschiedenem r durchgerechnet werden müssen.

Wenn kein a-priori-Wissen vorliegt, erscheint der unter 3. aufgezeigte Weg am sinnvollsten. Ist dieser wegen der langen Rechenzeit nicht möglich, so kann nach einer Simulationsstudie von Linn (1968) vor allem der Scree-Test empfohlen werden.

1.4. Minimaleigenschaft der Hauptkomponenten

Grundlegend für diese Arbeit sind die Aussagen des folgenden Satzes (vgl. Wilkinson 1965, S. 105):

Satz 1.1.

Sei $\underline{F} = (f_{ij})$ eine symmetrische $m \times m$ -Matrix und seien l_i ($i=1(1)m$) die Eigenwerte von $\underline{F}$.

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{ij}^2 = \sum_{i=1}^m l_i^2$$

Beweis:

Sei $\underline{G} = \underline{M} \cdot \underline{L}^{1/2}$, wobei $\underline{L}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte und $\underline{M}$ die Matrix der entsprechend geordneten orthonormierten Eigenvektoren von $\underline{F}$ ist. Dann gilt: $\underline{F} = \underline{G}\underline{G}'$

Oder:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{ij}^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\sum_{p=1}^m g_{ip} g_{jp} \right)^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g_{ip} g_{jp} g_{iq} g_{jq} = \\
 &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \sum_{i=1}^m g_{ip} g_{iq} \sum_{j=1}^m g_{jp} g_{jq} = \\
 &= \sum_{p=1}^m l_p^2 \quad \text{wegen} \quad \sum_{i=1}^m g_{ip} g_{iq} = \begin{cases} 1_p & \text{für } p=q \\ 0 & \text{für } p \neq q \end{cases}
 \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Damit lassen sich die Aussagen des folgenden Satzes beweisen, die von Keller (1962) hergeleitet wurden:

Satz 1.2.:

Seien $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m$ die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix $\underline{F} = (f_{ij})$ mit $l_r \geq 0$. Seien weiter $\underline{L}$ die $r \times r$ -Diagonalmatrix der ersten r Eigenwerte und $\underline{M}$ die $m \times r$ -Matrix der zugehörigen, entsprechend geordneten normierten und orthogonalen Eigenvektoren von $\underline{F}$.

Gesucht ist eine reelle $m \times r$ -Matrix $\underline{G}$, die

$$Q(\underline{G}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(f_{ij} - \sum_{p=1}^r g_{ip} g_{jp} \right)^2$$

minimiert. Eine solche Matrix ist $\underline{G} = \underline{M} \cdot \underline{L}^{1/2}$

Beweis:

1. Sei $\underline{g}_p$ der Vektor der p -ten Spalte von $\underline{G} = \underline{M} \cdot \underline{L}^{1/2}$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^m g_{ip} g_{iq} = 0 \text{ für } p, q=1(1)r, p \neq q.$$

2. Damit ergeben sich nach kurzer Rechnung die notwendigen Bedingungen für ein Minimum von Q:

$$\frac{1}{4} \frac{\partial Q}{\partial g_{ip}} = g_{ip} \sum_{k=1}^m g_{kp}^2 - \sum_{k=1}^m f_{ik} g_{kp} = 0 \quad \begin{matrix} (i=1(1)m \\ p=1(1)r) \end{matrix}$$

oder in Matrizenschreibweise:

$$\underline{F} \cdot \underline{g}_p = \left(\sum_{k=1}^m g_{kp}^2 \right) \cdot \underline{g}_p \quad (p=1(1)r).$$

Dies ist aber die Bestimmungsgleichung der p-ten Spalte von $\underline{M} \cdot \underline{L}^{1/2}$, die damit die notwendigen Bedingungen für ein Minimum von Q erfüllt.

3. Nun wird definiert:

$$\underline{E} = (e_{ij}) = \underline{F} - \underline{G}\underline{G}'$$

$\underline{E}$ hat die Eigenwerte $\lambda_{r+1} \geq \lambda_{r+2} \geq \dots \geq \lambda_m$.
Die restlichen r Eigenwerte sind Null (Zurmühl 1964, S.183f).

Wegen Satz 1.1. gilt somit:

$$Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m e_{ij}^2 = \sum_{p=r+1}^m \lambda_p^2$$

4. Wegen $\underline{G} = \underline{M} \cdot \underline{L}^{1/2}$ ist $\underline{G}$ nur dann reell, wenn gilt:
 $\lambda_p \geq 0$ für alle $p=1(1)r$, woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

Damit ist der Beweis vollständig.

Ist $\underline{F}$ gleich der Korrelationsmatrix $\underline{R}$, so ist $\underline{G}$ die Matrix der Hauptkomponenten. Abgesehen von den Folgerungen, die in den folgenden Abschnitten aus Satz 1.2. gezogen werden können, gibt dieser Satz auch eine sinnvolle Begründung für die Verwendung von Hauptkomponenten.

Hauptkomponenten empfehlen sich aber noch auf andere Weisen zur Erklärung eines Datensatzes von standardisierten Variablen. Einige, die besonders anschaulich sind, sollen erwähnt werden:

1. Im m -dimensionalen Raum der Variablen ergeben sich die n Messungen als n Punkte. Gesucht ist die Gerade, die die Summe der quadrierten, zur Geraden senkrechten Abstände der Punkte von der Geraden minimiert. Es läßt sich zeigen (vgl. z.B. Malinvaud 1970, S.9ff), daß dies die Gerade durch den Ursprung mit Richtung des ersten Hauptkomponentenvektors erfüllt.

2. Der erste Hauptkomponentenvektor maximiert die Varianz, die durch den ersten Faktor erklärt wird. Über diese Eigenschaft wurde die Hauptkomponentenmethode erstmals 1933 von Hotelling hergeleitet.

3. Sind die m Variablen normalverteilt, so können die "Höhenlinien" der multivariaten Dichte als Ellipsoide gedacht werden. Die Matrix dieser quadratischen Form ist $\underline{R}^{-1}$, wie man sich leicht durch Betrachten der Dichte der multivariaten Normalverteilung überzeugt (vgl. z.B. Anderson 1958, S.17). Der Hauptkomponentenvektor zum größten Eigenwert von $\underline{R}$ ist gleichzeitig Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert von $\underline{R}^{-1}$ und liegt damit in Richtung der längsten Hauptachse dieses Ellipsoids (vgl. z.B. Zurmühl 1964, S.162 und S.135f).

KAPITEL 2: VERFAHREN MIT NICHT POSITIV SEMIDEFINITER RESTMATRIX $R_h - AA'$

2.1. Problemstellung

In den folgenden Abschnitten werden drei Grundtypen der FA unterschieden:

Typ 1: Iterierte Hauptfaktorenmethode (IHFM) und Minres-Methode

Typ 2: Kanonische FA und Maximum-Likelihood-FA (MLFA)

Typ 3: Alpha-FA.

Die Grundprinzipien dieser Methoden sollen dargestellt und skizzenhaft je ein daraus folgendes Eigenwertproblem hergeleitet werden. Eine ausführliche Herleitung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen; diesbezüglich muß auf die Literatur verwiesen werden.

Dabei wird sich zeigen, daß verschiedene Methoden des gleichen Typs zu gleichen Eigenwertproblemen führen und daß sich diese Eigenwertprobleme in einheitlicher Weise darstellen lassen. Eine weitere einheitliche Darstellung führt die Kommunalitätenschätzung auf ein Minimierungsproblem gewichteter Quadratsummen zurück.

Diese Darstellungsformen erlauben den Schluß, daß alle drei Verfahren zu nicht positiv semidefiniten Restmatrizen führen und nicht notwendig eindeutige Lösungen haben.

Die für die Praxis wichtigste der genannten Methoden ist die IHFM; diese wird daher näher untersucht. Dabei wird sich zeigen, daß diese Methode eine spezielle Form eines Gradientenverfahrens ist und daß sie stets konvergiert.

2.2. Die iterierte Hauptfaktorenmethode und die Minres-Methode

2.2.1. Problemstellung

Die in der Praxis am meisten verwendete Methode der Kommunalitätenschätzung ist bis heute die IHFM, die bereits 1934 von Thomson vorgeschlagen wurde. Diese Methode ist über Programmpakete wie SPSS, PMDP und SAS leicht verfügbar (vgl. McCallum 1983), in der praktischen Anwendung ergeben sich jedoch folgende Probleme:

1. Die Konvergenz des Verfahrens ist noch nicht bewiesen worden. So schreibt Überla (1971, S.160): "Es ist theoretisch nicht gezeigt worden, daß ... Konvergenz eintreten muß, unter welchen Bedingungen sie eintritt und ob der erreichte Grenzwert mit der tatsächlichen Kommunalität zusammenfällt." Daß die Frage der Konvergenz ungelöst ist, bestätigen auch u.a. Pawlik (1967, S.131), Harman (1970, S.86), Gorsuch (1974, S.98), Revenstorf (1976, S.190) und Arminger (1979, S.44). Die Zahl der Literaturstellen bezeugt das Interesse, das dieser Frage entgegengebracht wird.

Weil somit die Gefahr besteht, daß sich das Verfahren ad infinitum fortsetzt, wird das Problem in der Praxis so gelöst, daß eine Höchstzahl von Iterationen vorgegeben werden muß.

Demgegenüber wird hier bewiesen, daß das Verfahren stets konvergiert. Eine Folge davon ist, daß die Anzahl der benötigten Iterationen immer endlich ist.

2. Es ist unklar, wie zu verfahren ist, wenn der sogenannte Heywood-Fall auftritt, d.h. wenn eine Kommunalität bei einer Iteration größer eins wird.

Die erwähnten Programmpakete brechen das Verfahren ab, teilweise werden die Werte der letzten Iteration als Ergebnis ausgedruckt. Diese Vorgehensweise wird sich als nicht angemessen erweisen.

Schließlich soll gezeigt werden, daß die IHFM und die Minres-Methode identische Lösungen liefern.

2.2.2. Darstellung des Verfahrens der iterierten Hauptfaktorenmethode

Folgende zusätzliche Bezeichnungsweise wird benötigt: Ein in Klammern hochgestelltes "k" symbolisiert, daß der entsprechende Wert im k-ten Iterationsschritt ($k = 0, 1, 2, \dots$) erreicht wurde. (Beispiele: $\underline{A}^{(k)}$, $\underline{R}_h^{(k)}$)

Weiter sei $\underline{H}^2$ die Diagonalmatrix der Kommunalitäten.

Dann läßt sich die IHFM folgendermaßen darstellen:

1. Gegeben sei eine $m \times m$ -Korrelationsmatrix $\underline{R}$. Gebe Anzahl der zu extrahierenden Faktoren r vor mit $r < m$ sowie Abbruchkriterium e (beliebig kleine positive Zahl).

Gebe Matrix $\underline{H}^{2(0)}$ so vor, daß $0 \leq h_i^{2(0)} \leq 1$ für alle i , $i=1(1)m$ und der r -te der der Größe nach in nicht aufsteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerte der Matrix $\underline{R} - \underline{I} + \underline{H}^{2(0)}$ positiv ist.

2. Es wird die $(k+1)$ -te Iteration betrachtet:

Als Ergebnis der k -ten Iteration ist gegeben $\underline{R}_h^{(k)} = \underline{R} - \underline{I} + \underline{H}^{2(k)}$ sowie das nach der Hauptfaktorenmethode extrahierte Faktormuster $\underline{A}^{(k)}$.

Bilde

$$h_i^{2(k+1)} = \min\left(1, \sum_{p=1}^r a_{ip}^{(k)2}\right). \quad (2.1.)$$

und die Prüfgröße

$$P = \left[(1/m) \sum_{i=1}^m (h_i^2(k) - h_i^2(k+1))^2 \right]^{0,5}$$

Wenn $P > e$ erfolgt neue Iteration, sonst Abbruch des Verfahrens.

Die Vorgehensweise nach (2.1.) garantiert, daß keine Kommunalität größer eins wird. Es wird sich zeigen, daß damit angemessener eine zulässige Lösung garantiert wird, als wenn das Verfahren abgebrochen wird, sobald der Heywood-Fall auftritt.

Wird angenommen, daß keine Kommunalität > 1 wird, so läßt sich die Lösung dieses Verfahrens folgendermaßen charakterisieren:

$$\underline{H}^2 = \text{diag}(\underline{A}\underline{A}') \quad (2.2a)$$

wobei

$$\underline{A} = \underline{M} \cdot \underline{L}^{1/2} \quad (2.2b)$$

mit

$\underline{L}$ = rxr-Matrix der r größten, in nicht aufsteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerte von $\underline{R}_h$.

$\underline{M}$ = mxr-Matrix der entsprechend geordneten Eigenvektoren von $\underline{R}_h$.

Es gilt also:

$$\underline{R}_h \cdot \underline{M} = \underline{M} \cdot \underline{L} \quad (2.2c)$$

Als Lösung des Faktorisierungsproblems ergibt sich:

$$\underline{A}'\underline{A} = \underline{L}^{1/2} \cdot \underline{M}'\underline{M} \cdot \underline{L}^{1/2} = \underline{L} \quad (2.2d)$$

Die Formeln (2.2b) bis (2.2d) gelten, weil $\underline{A}$ nach der Hauptfaktorenmethode bestimmt wird. Diese hat

bekanntlich die Eigenschaft, daß jeder Faktor ein Maximum der noch nicht erklärten Varianz erklärt.

2.2.3. Gleichwertigkeit der iterierten Hauptfaktorenmethode mit der Minres-Methode

Das folgende Ergebnis stammt von Keller (1962). Es soll gezeigt werden, daß die Minres-Methode (Harman und Jones 1966, Harman und Fukuda 1966) und die IHFM gleichwertig sind. Hierzu wird folgende Quadratsumme betrachtet:

$$Q = Q(\underline{A}, \underline{H}^2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (r_{ij} - \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho} a_{j\rho})^2$$

mit $r_{ii} = h_i^2$, wobei die Kommunalitäten den in Abschnitt 2.2.2. genannten Bedingungen für $\underline{H}^{2(0)}$ genügen sollen, ansonsten aber beliebig sind.

Nun wird $Q(\underline{A}, \underline{H}^2)$ unter der Nebenbedingung reeller Matrizen $\underline{A}$ minimiert. $Q(\underline{A}, \underline{H}^2)$ wird ein Minimum

- a) bezüglich $\underline{A}$, wenn $\underline{A}$ nach der Hauptfaktorenmethode bestimmt ist (wegen Satz 1.2.) und
- b) bezüglich $\underline{H}^2$, wenn $\underline{H}^2 = \text{diag}(\underline{A}\underline{A}')$ gilt, wobei der Einfachheit halber angenommen sei, daß keine Kommunalität > 1 wird.

Sind beide Voraussetzungen erfüllt, so liegt aber eine Lösung nach der IHFM vor.

Die IHFM minimiert also die Funktion

$$Q' = Q'(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (r_{ij} - \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho} a_{j\rho})^2 \quad (2.2e)$$

und bestimmt die Kommunalitäten nach (2.2a). (2.2e) ist aber genau die Minres-Zielfunktion.

Wird Q' bezüglich $\underline{A}$ minimiert ohne Anwendung der IHFM, so wird die erhaltene Matrix $\underline{A}$ i.a. nicht die Bedingung (2.2d) erfüllen, da Q' durch eine ortho-

gonale Transformation von A nicht beeinflußt wird. (2.2d) wird deshalb von Harman und Jones (1966) als zusätzliche Bedingung eingeführt, um die sogenannte "kanonische Form" der Lösung zu erhalten.

2.2.4. Beweis der Konvergenz der iterierten Hauptfaktorenmethode

In diesem Abschnitt soll bewiesen werden, daß die Folge der $h_i^{2(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, die von der IHFM erzeugt wird, für alle $i=1(1)m$ stets konvergiert. Damit ist gewährleistet, daß das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Iterationen abbricht.

Hierzu werden zwei Hilfssätze benötigt.

Der erste Hilfssatz wird nach Wilkinson (1965, S.104) zitiert. Dort befindet sich auch ein Beweis.

Lemma 2.1.:

Sei $\underline{D} = \underline{B} + \underline{C}$; seien $\underline{B}$, $\underline{C}$ und $\underline{D}$ symmetrische $m \times m$ -Matrizen mit den in nicht aufsteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerten b_i , c_i bzw. d_i ($i=1(1)m$).

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^m (d_i - b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^m c_i^2$$

Der zweite Hilfssatz formuliert eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Folge $\{b_k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 2.2.:

Sei $\{b_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge und gelte für jede natürliche Zahl s :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^s (b_{k+j-1} - b_{k+j})^2 = 0. \quad (2.3)$$

Dann konvergiert $\{b_k\}$.

Beweis:

Wegen der Definition des Grenzwerts einer Folge (vgl. z.B. Bronstein Semendjajew 1980, S.297) kann (2.3.) etwas ausführlicher geschrieben werden:

Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k > k_0$ gilt:

$$\sum_{j=1}^s (b_{k+j-1} - b_{k+j})^2 < \varepsilon \quad (2.3a)$$

Eine Folge $\{b_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergiert nach dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für jedes $s \in \mathbb{N}$ und $k \geq k_0$ gilt:

$$|b_k - b_{k+s}| < \varepsilon.$$

(Vgl. z.B. Bronstein Semendjajew 1980, S.297.)

Nun sei $\{b_k\}$ eine divergente Folge.

Dann existiert zu einem $s_0 \in \mathbb{N}$ und einem $d_0 > 0$ sowie zu jedem $k_0 \in \mathbb{N}$ mindestens ein $k \geq k_0$, so daß

$$|b_k - b_{k+s_0}| \geq d_0$$

Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung:

$$\sum_{j=1}^{s_0} |b_{k+j-1} - b_{k+j}| \geq d_0.$$

Nun sei g der Index des größten Summanden, d.h. es gelte:

$$|b_{k+g-1} - b_{k+g}| \geq |b_{k+j-1} - b_{k+j}| \\ \text{für alle } j=1(1)s_0$$

Dann gilt:

$$|b_{k+g-1} - b_{k+g}| \geq (1/s_0) \cdot d_0$$

und somit:

$$(b_{k+g-1} - b_{k+g})^2 \geq (1/s_0^2) \cdot d_0^2$$

woraus folgt:

$$\sum_{j=1}^{s_0} (b_{k+j-1} - b_{k+j})^2 \geq (1/s_0^2) \cdot d_0^2.$$

Es gibt demnach kein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$ und $s \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^s (b_{k+j-1} - b_{k+j})^2 < (1/s^2) \cdot d_0^2$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung (2.3a) steht. Folglich ist $\{b_k\}$ eine konvergente Folge, was zu beweisen war.

Zum Beweis der Konvergenz der Folge der h_i^2 ($i=1(1)m$) genügt also der Beweis, daß für alle $s \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^s (h_i^2(k+j-1) - h_i^2(k+j))^2 = 0 \quad (2.4.)$$

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

1. Zunächst wird gezeigt, daß die Folge der

$$Q(k) = Q(\underline{A}(k); \underline{H}^2(k)) = \|\underline{R} - \underline{I} + \underline{H}^2(k) - \underline{A}(k) \underline{A}^T(k)\|_2$$

konvergiert, wobei die senkrechten Striche vor und hinter einer Matrix die euklidische Norm dieser

Matrix kennzeichnen.

Hierzu wird zunächst bewiesen, daß die Folge der $Q^{(k)}$ monoton fallend ist, daß also gilt:

$$Q^{(k+1)} \leq Q^{(k)}$$

Dies ist gewährleistet, wenn gilt:

$$Q(\underline{A}^{(k)}, \underline{H}^{2(k+1)}) \leq Q(\underline{A}^{(k)}, \underline{H}^{2(k)}) \quad (2.5.)$$

und

$$Q(\underline{A}^{(k+1)}, \underline{H}^{2(k+1)}) \leq Q(\underline{A}^{(k)}, \underline{H}^{2(k+1)}) \quad (2.6.)$$

wobei

$$Q(\underline{A}^{(k)}, \underline{H}^{2(k+1)}) = \|\underline{R} - \underline{I} + \underline{H}^{2(k+1)} - \underline{A}^{(k)} \underline{A}^{(k)'}\|^2.$$

Zur Abkürzung wird geschrieben:

$$\begin{aligned} \underline{E}^{(k)} &= \underline{R} - \underline{I} + \underline{H}^{2(k)} - \underline{A}^{(k)} \underline{A}^{(k)'} \text{ und} \\ \underline{E}_0^{(k)} &= \underline{R} - \underline{I} + \underline{H}^{2(k+1)} - \underline{A}^{(k)} \underline{A}^{(k)'} \end{aligned}$$

Damit läßt sich (2.5.) folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m e_{oij}^{(k)2} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m e_{ij}^{(k)2} \quad (2.5a)$$

wobei $e_{ij}^{(k)}$ bzw. $e_{oij}^{(k)}$ die Elemente der Matrix $\underline{E}^{(k)}$ bzw. $\underline{E}_0^{(k)}$ sind.

Beweis von (2.5a):

Für jede Kommunalität folgt aus (2.1.):

$$\begin{aligned} (h_i^{2(k+1)} - \sum_{p=1}^r a_{ip}^{(k)2})^2 &\leq \\ (h_i^{2(k)} - \sum_{p=1}^r a_{ip}^{(k)2})^2, \end{aligned}$$

was gleichwertig ist mit:

$$\sum_{i=1}^m e_{oii}^{(k)2} \leq \sum_{i=1}^m e_{ii}^{(k)2}$$

Da weiter $e_{ij}^{(k)} = e_{oij}^{(k)}$ für alle $i, j=1(1)m$, $i \neq j$, folgt daraus sofort (2.5a).

Beweis von (2.6.):

Aus $\underline{R}_h^{(k+1)} = \underline{R} - \underline{I} + \underline{H}^{2(k+1)}$ und der Definition von $\underline{E}_0^{(k)}$ folgt:

$$\underline{R}_h^{(k+1)} = \underline{A}^{(k)} \underline{A}^{(k)'} + \underline{E}_0^{(k)} \quad (2.7.)$$

$\underline{R}_h^{(k+1)}$ habe die Eigenwerte

$$1_1^{(k+1)} \geq 1_2^{(k+1)} \geq \dots \geq 1_m^{(k+1)}.$$

$\underline{A}^{(k)} \underline{A}^{(k)'}$ habe die Eigenwerte

$1_1^{(k)} \geq 1_2^{(k)} \geq \dots \geq 1_r^{(k)}$, die restlichen $m-r$ Eigenwerte sind Null.

$\underline{E}_0^{(k)}$ habe die Eigenwerte

$$1_{o1}^{(k)} \geq 1_{o2}^{(k)} \geq \dots \geq 1_{om}^{(k)}.$$

Anwendung von Lemma 2.1. auf (2.7.) ergibt:

$$\sum_{\rho=1}^r (1_{\rho}^{(k+1)} - 1_{\rho}^{(k)})^2 + \sum_{\rho=r+1}^m 1_{\rho}^{(k+1)2} \leq \sum_{\rho=1}^m 1_{o\rho}^{(k)2} \quad (2.8.)$$

Weiter gilt wegen Satz 1.1.:

$$Q(\underline{A}^{(k+1)}, \underline{H}^{2(k+1)}) = \sum_{\rho=r+1}^m 1_{\rho}^{(k+1)2}$$

$$Q(\underline{A}^{(k)}, \underline{H}^{2(k+1)}) = \sum_{\rho=1}^m 1_{o\rho}^{(k)2}$$

Woraus wegen (2.8.) folgt:

$$\sum_{\rho=1}^r (1_{\rho}^{(k+1)} - 1_{\rho}^{(k)})^2 + Q^{(k+1)} \leq Q(\underline{A}^{(k)}; \underline{H}^{2(k+1)})$$

Daraus folgt unmittelbar (2.6.).

Damit ist bewiesen, daß die Folge der $Q^{(k)}$ monoton fallend ist.

Nun gilt:

"Eine monotone Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist." (Bronstein Semendjajew 1980, S.297)

Und weiter:

"Eine Folge $\{a_n\}$ heißt beschränkt, wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq K$." (Bronstein Semendjajew 1980, S.297)

Es ist noch zu beweisen, daß die Folge der $Q^{(k)}$ beschränkt ist.

Da die Folge der $Q^{(k)}$ monoton fallend ist gilt:

$$Q^{(k)} \leq Q^{(0)} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

wobei

$$Q^{(0)} = \|\underline{R} - \underline{I} + \underline{H}^{2(0)} - \underline{A}^{(0)}\underline{A}^{(0)'}\|^2$$

und $\underline{H}^{2(0)}$ die Matrix der Startwerte der Kommunalitäten (vgl. Abschnitt 2.2.2.) und $\underline{A}^{(0)}$ die reelle $m \times r$ -Matrix der Hauptfaktoren von $\underline{R} - \underline{I} + \underline{H}^{2(0)}$ sind.

Weiter ist $Q^{(k)}$ als Quadratsumme reeller Zahlen stets ≥ 0 .

Damit gilt:

$$|Q^{(k)}| \leq Q^{(0)} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit ist die Konvergenz der Folge der $Q^{(k)}$ bewiesen.

2. Im zweiten Teil wird gezeigt, daß gilt:

$$\Delta Q^{(k+1)} \geq \sum_{i=1}^m (h_i^{2(k)} - h_i^{2(k+1)})^2 \quad (2.9.)$$

wobei $\Delta Q^{(k+1)} = Q^{(k)} - Q^{(k+1)}$.

Damit wird eine Beziehung zwischen der Folge der $Q^{(k)}$ und der Folge der $H^{2(k)}$ hergestellt.

Aus (2.6.) folgt:

$$\begin{aligned} \Delta Q^{(k+1)} &\geq Q(\underline{A}^{(k)}, \underline{H}^{2(k)}) - Q(\underline{A}^{(k)}, \underline{H}^{2(k+1)}) = \\ &= \sum_{i=1}^m (h_i^{2(k)} - \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^{(k)})^2 - \sum_{i=1}^m (h_i^{2(k+1)} - \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^{(k)})^2 \end{aligned}$$

Ausrechnen ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta Q^{(k+1)} &\geq \sum_{i=1}^m [(h_i^{2(k)})^2 - (h_i^{2(k+1)})^2 + 2 \cdot h_i^{2(k+1)} \cdot (\sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^{(k)})^2 - \\ &\quad - 2 \cdot h_i^{2(k)} \cdot (\sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^{(k)})^2] \end{aligned} \quad (2.10.)$$

$$\text{Für } h_i^{2(k+1)} = \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^{(k)} \leq 1$$

wird der i-te Summand von (2.10.):

$$\begin{aligned} (h_i^{2(k)})^2 - (h_i^{2(k+1)})^2 + 2 \cdot (h_i^{2(k+1)})^2 - 2 \cdot h_i^{2(k)} \cdot h_i^{2(k+1)} &= \\ = (h_i^{2(k)} - h_i^{2(k+1)})^2. \end{aligned}$$

$$\text{Für } h_i^{2(k+1)} = 1 \text{ und } \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^{(k)} \leq 1 + v_i \text{ mit } v_i > 0$$

wird der i-te Summand von (2.10.):

$$\begin{aligned} (h_i^{2(k)})^2 - 1 + 2 \cdot (1 + v_i) - 2 \cdot h_i^{2(k)} \cdot (1 + v_i) &= \\ = (h_i^{2(k)} - 1)^2 + (1 - h_i^{2(k)}) \cdot 2 \cdot v_i &\leq \\ \leq (h_i^{2(k)} - 1)^2 = (h_i^{2(k)} - h_i^{2(k+1)})^2 \end{aligned}$$

woraus unmittelbar (2.9.) folgt.

3. Im 3. Schritt wird abschließend (2.4.) und damit die Konvergenz der Folge der $h_i^{2(k)}$ für alle $i=1(1)m$ bewiesen.

Da die Folge der $Q^{(k)}$ konvergiert, erfüllt die Folge der $Q^{(k)}$ das Cauchy'sche Konvergenzkriterium.

Gleichwertig damit ist wegen der Definition des Grenzwerts, daß für beliebige $s \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (Q^{(k)} - Q^{(k+s)}) = 0$$

(Vgl. Joos Richter 1979, S.281)

Dann gilt auch, da s beliebig $\in \mathbb{N}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (Q^{(k-1)} - Q^{(k+s)}) = 0 \quad (2.11.)$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned} Q^{(k-1)} - Q^{(k+s)} &= \\ &= Q^{(k-1)} - Q^{(k)} + Q^{(k)} - Q^{(k+1)} + \dots + \\ &\quad + Q^{(k+s-1)} - Q^{(k+s)} = \\ &= \Delta Q^{(k)} + \Delta Q^{(k+1)} + \dots + \Delta Q^{(k+s)} \end{aligned}$$

und somit wegen (2.9.) und (2.11.):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^m (h_i^{2(k+j-1)} - h_i^{2(k+j)})^2 = 0$$

Weil alle Glieder dieser Doppelsumme nicht negativ sind und der Grenzwert einer Summe gleich der Summe der Grenzwerte ist (Joos Richter 1979, S.25), folgt

daraus:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^S (h_i^{2(k+j-1)} - h_i^{2(k+j)})^2 = 0$$

für alle $i=1(1)m$, was zu beweisen war.

2.2.5. Die iterierte Hauptfaktorenmethode als Gradientenverfahren

In diesem Abschnitt soll bewiesen werden, daß die IHFM ein Gradientenverfahren zur Minimierung einer Quadratsumme von Eigenwerten ist. Dadurch wird die Vorgehensweise der IHFM theoretisch einsichtig; dies hat aber auch eine nicht unbedeutende praktische Konsequenz.

Satz 2.1.:

Wenn $\sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}(k)^2 \leq 1$ für alle $i, i=1(1)m$

und keine mehrfachen Eigenwerte der Matrix $R_h(k)$ auftreten, gilt für die Veränderung der Kommunalitäten in einer Iteration:

$$\underline{H}^2(k+1) - \underline{H}^2(k) = -0.5 \cdot \underline{\nabla} Q^*(\underline{H}^2(k)) \cdot \underline{I}$$

wobei

$$Q^*(\underline{H}^2(k)) := \sum_{\rho=r+1}^m 1_{\rho}(k)^2$$

und $1_1(k) > 1_2(k) > \dots > 1_m(k)$ Eigenwerte von $R_h(k)$ und

$$\underline{\nabla} Q^*(\underline{H}^2(k)) = \begin{bmatrix} \partial Q^* / \partial h_1^2(k) \\ \partial Q^* / \partial h_2^2(k) \\ \vdots \\ \partial Q^* / \partial h_m^2(k) \end{bmatrix}$$

und

$\underline{I}$ = Einheitsmatrix.

Beweis:

1. Zunächst wird die Ableitung des Eigenwerts l_p ($p=1(1)m$) der Matrix R_h nach der i -ten Kommunalität ($i=1(1)m$) benötigt.¹⁾

Sei $\underline{C}$ eine $m \times m$ -Matrix mit $c_{ii} \neq 0$ und allen anderen Elementen gleich Null. Sei $\underline{q}_p$ der standardisierte Eigenvektor zum Eigenwert l_p . Sei weiter:

$$(\underline{R}_h + \underline{C})(\underline{q}_p + \underline{v}_p) = (l_p + d_p)(\underline{q}_p + \underline{v}_p) \quad (2.12a)$$

$$\text{mit: } |\underline{q}_p + \underline{v}_p| = 1 \quad (2.12b)$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$\underline{R}_h \underline{q}_p + \underline{R}_h \underline{v}_p + \underline{C} \underline{q}_p + \underline{C} \underline{v}_p = l_p \underline{q}_p + l_p \underline{v}_p + d_p \underline{v}_p \quad (2.12c)$$

Da Eigenwerte stetige Funktionen der Matrixelemente sind (zum Beweis s. Franklin 1968, S.191f) gilt:

$$\lim_{c_{ii} \rightarrow 0} d_p = 0$$

Wenn c_{ii} gegen Null strebt, wird damit (2.12c):

$$\underline{R}_h \cdot \underline{v}_p = l_p \cdot \underline{v}_p$$

Da l_p nach Voraussetzung einfacher Eigenwert ist und wegen (2.12b) gilt somit:

1) Diese Ableitung wurde bereits von Jöreskog 1972 bestimmt. Die dortige Herleitung ist jedoch sehr knapp und berücksichtigt teilweise nicht die erforderlichen Voraussetzungen.

$$\lim_{c_{ii} \rightarrow 0} v_{jp} = 0 \text{ für alle } j=1(1)m \quad (2.12d)$$

Aus (2.12c) ergibt sich nach kurzer Rechnung:

$$\frac{d_p}{c_{ii}} = \frac{q_{ip}^2 + q_{ip} v_{ip}}{1 + \sum_{j=1}^m q_{jp} v_{jp}}$$

und somit wegen (2.12d):

$$\lim_{c_{ii} \rightarrow 0} \frac{d_p}{c_{ii}} = \frac{\partial l_p}{\partial h_i^2} = q_{ip}^2 \quad (2.13.)$$

2. Aus der Definition von $Q^*(H)$ und aus (2.13.) folgt sofort nach der Kettenregel:

$$\partial Q^* / \partial h_i^2 = 2 \sum_{p=r+1}^m l_p q_{ip}^2 \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial Q^*}{\partial h_i^2} = -\sum_{p=r+1}^m l_p q_{ip}^2$$

Andererseits gilt wegen $h_i^{2(k+1)} = \sum_{p=1}^r a_{ip}^{(k)2}$:

$$h_i^{2(k+1)} = \sum_{p=1}^r l_p^{(k)} q_{ip}^{(k)2} \quad \text{und wegen}$$

$$h_i^{2(k)} = \sum_{p=1}^m l_p^{(k)} q_{ip}^{(k)2}$$

$$h_i^{2(k+1)} - h_i^{2(k)} = -\sum_{p=r+1}^m l_p^{(k)} q_{ip}^{(k)2} = -0,5 \partial Q^* / \partial h_i^2$$

Damit ist der Beweis vollständig.

Aus Satz 2.1. folgt eine nicht unbedeutende praktische Konsequenz:

Bei der Iterationsfolge ergibt sich nicht selten, daß mindestens eine Kommunalität größer 1 wird. In Programmpaketen (z.B. SPSS), aber auch bei Simulationsstudien (z.B. Browne 1968) ist es üblich, das Verfahren in diesem Fall abubrechen. Da die IHFM ein Gradientenverfahren ist, ist unmittelbar einsichtig, daß sich dann für verschiedene Startwerte i.a. auch verschiedene "Lösungen" ergeben müssen

und daß weiter diese "Lösungen" i.a. nicht einmal lokale Minima der Funktion Q^* in dem durch $0 \leq h_i^2 \leq 1$, $i=1(1)m$ beschränkten zulässigen Bereich sind.

Dagegen entspricht das in Abschnitt 2.2.2. beschriebene Verfahren der solchen Problemstellungen angemessenen Gradientenprojektionsmethode von Rosen (vgl. Hadley 1964, S.315f), wie man sich leicht überzeugt.

2.3. Kanonische Faktorenanalyse und Maximum-Likelihood-Faktorenanalyse

2.3.1. Kanonische Faktorenanalyse

Der kanonische Korrelationskoeffizient wurde 1936 von Hotelling entwickelt; die folgenden Ausführungen folgen zunächst T.W. Anderson (1958, S.288ff).

Gegeben seien die $m_1 \times n$ -Datenmatrix $\underline{X}_1$ und die $m_2 \times n$ -Datenmatrix $\underline{X}_2$ mit

m_1 bzw. m_2 = Anzahl der Variablen

n = Anzahl der Testeinheiten.

Die gesamte Datenmatrix sei $\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix}$

Die Kovarianzmatrix sei entsprechend partitioniert:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

Gesucht sind zwei m_1 - bzw. m_2 -reihige Vektoren $\underline{b}_1$ und $\underline{b}_2$ so, daß die Linearkombinationen $\underline{b}_1' \underline{X}_1$ und $\underline{b}_2' \underline{X}_2$ maximal miteinander korrelieren.

Da der Korrelationskoeffizient gegenüber linearen Transformationen der Variablen invariant ist, kann

o.B.d.A. als Nebenbedingung eingeführt werden, daß die Varianzen von $b_1'X_1$ und $b_2'X_2$ eins sind.

Es gilt also: $b_1'S_{11}b_1 = b_2'S_{22}b_2 = 1$

Dann ist der Korrelationskoeffizient von $b_1'X_1$ und $b_2'X_2$

$$r = b_1'S_{12}b_2$$

zu maximieren.

Anwendung der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode liefert nach einiger Rechnung (T.W. Anderson 1958, S.289f und S.296) folgende Eigenwertprobleme:

$$(S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} - r^2S_{11}) \cdot b_1 = 0$$

$$(S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} - r^2S_{22}) \cdot b_2 = 0$$

Die kanonische FA (Rao 1955) will die Matrix A so bestimmen, daß die Faktoren und die Variablen maximal korrelieren.

Mit $X_1 = Z$ und $X_2 = P$ wird

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{R} & \underline{A} \\ \underline{A}' & \underline{I} \end{bmatrix}$$

(wegen (1.2.) und Abschnitt 1.1.2. dieser Arbeit). Obiges Gleichungssystem wird also:

$$(\underline{A}\underline{A}' - r^2\underline{R}) \cdot b_1 = 0$$

$$(\underline{A}'\underline{R}^{-1}\underline{A} - r^2\underline{I}) \cdot b_2 = 0$$

Beide Gleichungen lassen sich ineinander überführen, wenn $\underline{A}\underline{A}'$ invertierbar ist. Einer weiteren Behandlung zugänglich ist die erste Gleichung. Aus

ihr erhält man die kanonischen Korrelationen als Lösungen des folgenden Polynoms:

$$|\underline{A}\underline{A}' - r^2\underline{R}| = 0$$

Mit $\underline{A}\underline{A}' = \underline{R} - \underline{U}^2$ ergibt sich:

$$|\underline{R} - 1/(1-r^2) \cdot \underline{U}^2| = 0$$

Oder:

$$|\underline{U}^{-1}\underline{R}\underline{U}^{-1} - 1/(1-r^2) \cdot \underline{I}| = 0$$

Der Wert von r wird also maximal, wenn $1/(1-r^2)$ maximal wird. Dies ist für den größten Eigenwert von $\underline{U}^{-1}\underline{R}\underline{U}^{-1}$ der Fall. Im Interesse einer einheitlichen Darstellung werden nach einem Vorschlag von Harris (1962) statt der Eigenwerte von $\underline{U}^{-1}\underline{R}\underline{U}^{-1}$ die von $\underline{U}^{-1}\underline{R}\underline{U}^{-1} - \underline{I} = \underline{U}^{-1}(\underline{R} - \underline{U}^2)\underline{U}^{-1}$ bestimmt. Diese sind gegenüber denen von $\underline{U}^{-1}\underline{R}\underline{U}^{-1}$ um eins vermindert, die Eigenvektoren bleiben gleich.

Das neue Eigenwertproblem lautet demnach:

$$|\underline{U}^{-1} \cdot (\underline{R} - \underline{U}^2) \cdot \underline{U}^{-1} - r^2/(1-r^2) \cdot \underline{I}| = 0$$

woraus zu ersehen ist, daß r nur für nicht-negative Eigenwerte von $\underline{U}^{-1}(\underline{R} - \underline{U}^2)\underline{U}^{-1}$ sinnvolle Werte annimmt. Dieses Eigenwertproblem läßt sich schreiben:

$$\underline{U}^{-1} \cdot (\underline{R} - \underline{U}^2) \cdot \underline{U}^{-1} \cdot \underline{M} = \underline{M} \cdot \underline{L} \quad (2.14a)$$

Dabei ist $\underline{L}$ bzw. $\underline{M}$ die Matrix der Eigenwerte bzw. der normierten Eigenvektoren.

Werden s Faktoren extrahiert, so gilt:

$$\underline{M} \cdot \underline{L} \cdot \underline{M}' = \underline{U}^{-1} \cdot (\underline{R} - \underline{U}^2) \cdot \underline{U}^{-1}$$

Oder:

$$\underline{U} \cdot \underline{M} \cdot \underline{L}^{1/2} \cdot \underline{L}^{1/2'} \cdot \underline{M}' \cdot \underline{U}' = \underline{R} - \underline{U}^2$$

Damit $\underline{R}_h = \underline{A}\underline{A}'$ muß also sein:

$$\underline{A} = \underline{U} \cdot \underline{M} \cdot \underline{L}^{1/2} \quad (2.14b)$$

Schließlich gilt:

$$\underline{H}^2 = \text{diag}(\underline{A}\underline{A}') \quad (2.14c)$$

2.3.2. Maximum-Likelihood-Faktorenanalyse

Die MLFA wurde erstmals 1940 von Lawley hergeleitet. Die Darstellung folgt, soweit nicht anders vermerkt, dem Buch von Lawley und Maxwell (1971, S.25ff). Die Herleitung erfolgt für die Kovarianzmatrix; sie ist streng genommen für die Korrelationsmatrix nicht gültig, wird in der Praxis aber auch auf diese angewendet.

Die MLFA trifft zwei grundlegende Annahmen:

1. Die Variablen sind m-dimensional normalverteilt.
2. Die Kovarianzmatrix der Grundgesamtheit sei $\underline{C}$. Für diese wird angenommen, daß gilt: $\underline{C} = \underline{A}\underline{A}' + \underline{U}^2$, wobei $\underline{A}$ die m x r-Matrix der Faktorladungen ist.

Dann folgt die mit $N=n-1$ multiplizierte Stichprobenkovarianzmatrix $\underline{S}$ einer Wishart-Verteilung mit der Dichte (vgl. Anderson 1958, S.154):

$$f(N, \underline{S}) = \frac{|\underline{S}|^{0,5(n-m-2)} \cdot \exp[-0,5 \text{sp}(\underline{C}^{-1} \cdot \underline{S})] \cdot |\underline{C}|^{-0,5 \cdot N}}{2^{0,5 \cdot N \cdot m} \cdot \pi^{m(m-1)/4} \cdot \prod_{i=1}^m \Gamma[0,5(n-i)]}$$

wobei "sp" die Spur einer Matrix und "Γ" die Gammafunktion kennzeichnen.

$\underline{C}$ wird nun so geschätzt, daß $f(N, \underline{S})$ maximal wird; nach einer Herleitung von Lawley/Maxwell (1971, S.25f) ist dies der Fall, wenn

$$L = \log |\underline{C}| + \text{sp}(\underline{S}\underline{C}^{-1}) - \log |\underline{S}| - m$$

minimal wird, wobei $\underline{C} = \underline{A}\underline{A}' + \underline{U}^2$ einzusetzen ist.

Als zusätzliche Bedingung zur Lösung des Faktorenproblems wird eingeführt, daß $\underline{A}'\underline{U}^{-2}\underline{A}$ Diagonalmatrix ist. Eine anschauliche Begründung für diese Bedingung wie bei der IHFM (Maximierung der durch den ersten Faktor erklärten Varianz) gibt es nicht.

Nullsetzen der partiellen Ableitungen von L nach $\underline{A}$ und $\underline{U}^2$ (vgl. auch Weber 1974, S.42ff) führt zu folgenden Gleichungen:

$$\underline{U}^{-1} \cdot \underline{S} \cdot \underline{U}^{-1} \cdot \underline{M} = \underline{L}\underline{M}$$

$$\underline{U}^2 = \text{diag}(\underline{S} - \underline{A}\underline{A}')$$

wobei $\underline{L}$ und $\underline{M}$ die Matrizen der Eigenwerte bzw. der normierten Eigenvektoren von $\underline{U}^{-1}\underline{S}\underline{U}^{-1}$ sind.

Wird - nicht korrekt, aber üblich - für die Kovarianzmatrix $\underline{S}$ die Korrelationsmatrix $\underline{R}$ eingesetzt, so entspricht dies dem Eigenwertproblem der kanonischen Faktorenanalyse.

2.4. Alpha-Faktorenanalyse

Die Alpha-FA (Kaiser und Caffrey 1965) geht davon aus, daß die Elemente der Matrix $\underline{P}$ als gewichtete Summe der "gemeinsamen Teile" von $\underline{Z}$ dargestellt werden können.

Mit $\underline{Z}_g = \underline{A} \cdot \underline{P}$ und $\underline{W} = (\underline{A}'\underline{A})^{-1}\underline{A}'$ gilt: $\underline{P} = \underline{W} \cdot \underline{Z}_g$

Betrachtet man nur den Vektor $\underline{p}_1$ der Faktorwerte des ersten Faktors, so gilt:

$$\underline{p}_1' = \underline{w}' \underline{Z}_g$$

wobei $\underline{w}'$ der Zeilenvektor der ersten Zeile von $\underline{W}$ ist.

Grundgedanke der Alpha-FA ist, daß zur exakten Bestimmung von $\underline{p}_1$ unendlich viele Variable nötig wären. Ein Beispiel, das für diese Auffassung spricht, ist der Faktor "Intelligenz", zu dessen exakter Bestimmung sehr viele Tests (Variable) nötig wären. Die Alpha-FA will nun den quadrierten Korrelationskoeffizienten zwischen dem ersten Faktor, wie er sich aus m Variablen ergibt, und dem ersten Faktor, wie er sich aus unendlich vielen Variablen ergibt, maximieren. Kaiser und Caffrey bezeichnen diesen als α und behaupten, daß gilt:

$$\alpha = \frac{m}{m-1} \left(1 - \frac{\underline{w}' \underline{H}^2 \underline{w}}{\underline{w}' (\underline{R} - \underline{U}^2) \underline{w}} \right)$$

Wie McDonald (1970) richtig feststellt, verweisen Kaiser und Caffrey auf einen Artikel von Cronbach et al. (1963), der sich aber in der entscheidenden Passage auf ein persönliches Gespräch mit Kaiser bezieht. Letztendlich zitieren also Kaiser und Caffrey eine mündliche Äußerung von Kaiser selbst; die von ihnen verwendete Herleitung dieses Korrelationskoeffizienten wurde nie publiziert.

McDonald (1970) führt eine solche Herleitung nach den spärlichen Hinweisen von Kaiser und Caffrey (1965) durch. Dabei zeigt sich, daß die benötigten Annahmen keinesfalls für beliebige Vektoren $\underline{w}$ zu rechtfertigen sind.

Nimmt man aber an, daß die verwendeten m Variablen eine zufällige Stichprobe aus der Grundgesamtheit der unendlich vielen Variablen darstellt, so kann α

doch als sinnvolles Maß für den gesuchten Zusammenhang gelten.

Hierzu schreibt man mit $r_{ii} = h_i^2$:

$$\alpha = \frac{m}{m-1} \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j r_{ij} - \sum_{i=1}^m w_i^2 r_{ii}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j r_{ij}} = \frac{1}{m(m-1)} \frac{(\sum \sum w_i w_j r_{ij} - \sum w_i^2 r_{ii})}{\frac{1}{m \cdot m} \sum \sum w_i w_j r_{ij}}$$

α setzt also die Varianz von p_1 , die aufgrund des Zusammenhangs unter den gemeinsamen Teilen von $\underline{z}$ entsteht, in Beziehung zur Gesamtvarianz von p_1 , wobei Zähler und Nenner durch die Anzahl der Summanden dividiert werden.

Sind im Extremfall alle Korrelationen gleich Null, so enthält jede der einbezogenen Variablen vollständig neue Information. Es ist zu erwarten, daß auch jede nicht einbezogene Variable vollständig neue Information enthält. Aus einem aus m Variablen bestimmten Faktor kann folglich nicht auf den Faktor bei Zugrundelegung aller Variablen geschlossen werden; α ist Null.

Sind im anderen Extrem alle Korrelationen gleich eins, so enthalten alle einbezogenen Variablen die gleiche Information; dann werden auch nicht einbezogene Variable keine neue Information liefern. Der Faktor läßt sich bereits vollständig aus m Variablen bestimmen; α ist eins.

Die Herleitung des Eigenwertproblems der Alpha-FA ist einfach. Maximierung von α ist gleichbedeutend mit der Maximierung von

$$v = \frac{\underline{w}' (\underline{R} - \underline{U}^2) \underline{w}}{\underline{w}' \underline{H}^2 \underline{w}}$$

Mit $\underline{q} = \underline{H} \cdot \underline{w}$ und folglich $\underline{w} = \underline{H}^{-1} \cdot \underline{q}$ führt dies zu:

$$v = \frac{\underline{q}' \underline{H}^{-1} (\underline{R} - \underline{U}^2) \underline{H}^{-1} \underline{q}}{\underline{q} \underline{q}'}$$

Damit ist v Rayleigh-Quotient der Matrix $\underline{H}^{-1}(\underline{R} - \underline{U}^2)\underline{H}^{-1}$; dieser hat bekanntlich das absolute Maximum, wenn $\underline{q}$ Eigenvektor zum grössten Eigenwert dieser Matrix ist (vgl. Zurmühl 1964, S.186). Das Eigenwertproblem der Alpha-FA lautet also:

$$\underline{H}^{-1} \cdot (\underline{R} - \underline{U}^2) \underline{H}^{-1} \cdot \underline{M} = \underline{L} \cdot \underline{M} \quad (2.15a)$$

Dabei sind $\underline{M}$ und $\underline{L}$ die Matrix der normierten Eigenvektoren bzw. die Diagonalmatrix der in nicht aufsteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerte der Matrix $\underline{H}^{-1}(\underline{R} - \underline{U}^2)\underline{H}^{-1}$.

Analog zum Abschnitt 2.3.1. ergibt sich:

$$\underline{A} = \underline{H} \cdot \underline{M} \cdot \underline{L}^{1/2} \quad (2.15b)$$

$$\text{und: } \underline{H}^2 = \text{diag}(\underline{A} \underline{A}') \quad (2.15c)$$

2.5. Vereinheitlichte Darstellung als Eigenwertproblem

In diesem Abschnitt wird ein allgemeines Gleichungssystem formuliert, das die Minres-, Maximum-Likelihood- und Alpha-Faktorenanalyse als Spezialfälle enthält. Die folgende Darstellung basiert auf McDonald (1968, 1969, 1970).

Hierzu werden folgende Definitionen benötigt:

$\underline{w} = m \times 1$ - Vektor reeller Gewichte

$\underline{H}^2 = m \times m$ - Diagonalmatrix der Kommunalitäten

$\underline{D}^2 = m \times m$ - Diagonalmatrix, die später als $\underline{U}^2$ oder $\underline{I}$ oder $\underline{H}^2$ näher spezifiziert wird.

$\underline{Z}_g = m \times n$ - Matrix der gemeinsamen Teile von $\underline{Z}$

Dann ist $\underline{w}'\underline{R}_h\underline{w}$ die Varianz der Linearkombination $\underline{w}'\underline{z}_g$, $\underline{w}'\underline{D}^2\underline{w}$ eine gewichtete Summe von Varianzen.

Es werden nun die stationären Punkte (d.h. die Punkte mit verschwindenden ersten Ableitungen) bezüglich $\underline{w}$ des folgenden Quotienten gesucht:

$$l = (\underline{w}'\underline{R}_h\underline{w})/(\underline{w}'\underline{D}^2\underline{w}) \quad (2.16.)$$

Mit $\underline{q} = \underline{D}\underline{w}$ ergibt sich:

$$l = (\underline{q}'\underline{D}^{-1}\underline{R}_h\underline{D}^{-1}\underline{q})/(\underline{q}'\underline{q}) \quad (2.16a)$$

Zur Abkürzung sei definiert: $\underline{G} := \underline{D}^{-1}\underline{R}_h\underline{D}^{-1}$
 Wie man sofort sieht, ist l der Rayleigh-Quotient der Matrix $\underline{G}$ (vgl. Zurmühl 1964, S. 159). Da $\underline{G}$ symmetrisch ist, hat dieser genau dann einen stationären Punkt bezüglich $\underline{q}$, wenn $\underline{q}$ Eigenvektor (beliebiger Länge) ist; der Wert von l ist dann der entsprechende Eigenwert (Zurmühl 1964, S. 186).

Die stationären Punkte von (2.16.) und (2.16a) erfüllen somit folgendes allgemeine Gleichungssystem:

$$\underline{D}^{-1}\underline{R}_h\underline{D}^{-1}\underline{M} = \underline{M}\underline{L} \quad (2.17.)$$

Dabei ist:

$\underline{L}$ = rxr-Diagonalmatrix der r grössten, in nicht aufsteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerte von $\underline{G}$.

$\underline{M}$ = mxr-Matrix der zugehörigen, entsprechend geordneten normierten Eigenvektoren von $\underline{G}$.

Für die Matrix der Faktorladungen ergibt sich analog (2.14b):

$$\underline{A} = \underline{D} \cdot \underline{M} \cdot \underline{L}^{0.5} \quad (2.18.)$$

Damit ergibt sich sofort als Lösung für das Faktorisierungsproblem:

$$\begin{aligned}\underline{A}' \cdot \underline{D}^{-2} \cdot \underline{A} &= \underline{L}^{0.5} \cdot \underline{M}' \cdot \underline{D}' \cdot \underline{D}^{-2} \cdot \underline{D} \cdot \underline{M} \cdot \underline{L}^{0.5} = \\ &= \underline{L}^{0.5} \cdot \underline{M}' \underline{M} \cdot \underline{L}^{0.5}\end{aligned}$$

und wegen $\underline{M}'\underline{M}=\underline{I}$:

$$\underline{A}' \cdot \underline{D}^{-2} \cdot \underline{A} = \underline{L} \quad (2.19.)$$

Für die Diagonalmatrix der Kommunalitäten gilt:

$$\underline{H}^2 = \text{diag}(\underline{A}\underline{A}') \quad (2.20.)$$

Abhängig von der Wahl von $\underline{D}$ ergeben sich die bekannten Verfahren der Faktorenanalyse:

Typ1: $\underline{D}=\underline{I}$: IHFM und Minres-Methode.

Typ2: $\underline{D}=\underline{U}$: Kanonische FA und MLFA.

Typ3: $\underline{D}=\underline{H}$: Alpha-FA.

Aus dieser Darstellung läßt sich eine wichtige Folgerung ziehen, die auf Browne (1969) zurückgeht: Hierzu wird folgende Restmatrix betrachtet:

$$\underline{E} = \underline{R} - \underline{A}\underline{A}' - \underline{U}^2$$

Es wird angenommen, daß $\underline{E}$ nicht die Nullmatrix ist. Dies ist dann mit Wahrscheinlichkeit 1 der Fall, wenn r kleiner dem minimalen Rang von $\underline{R}$ ist. Weiter sei $\underline{A}_d$ die Matrix, die aus $\underline{B}$ entsteht, wenn von $\underline{B}$ die ersten r Spalten gestrichen werden. $\underline{A}_d$ ist also die Matrix der Faktorladungen der nicht extrahierten Faktoren. Es gilt:

$$\underline{E} = \underline{A}_d \underline{A}_d'$$

Wegen (2.20.) hat $\underline{E}$ in der Diagonale nur Nullen. Da die Summe der Diagonalglieder einer quadratischen Matrix gleich der Summe der Eigenwerte dieser Matrix ist, hat $\underline{E}$ sowohl positive als auch negative Eigenwerte. Das bedeutet aber, daß $\underline{A}_d$ imaginäre

Elemente enthält, was dem Modell der Faktorenanalyse widerspricht (vgl. Abschnitt 1.1.3.).

Aus dieser Darstellung läßt sich auch ein vereinheitlichter Lösungsalgorithmus ableiten, der analog zur IHFM abläuft:

1. Vorgegeben sind:

- Korrelationsmatrix $\underline{R}$
- Startwerte für Kommunalitäten mit $0 < h_{1i}^2 < 1$
- Anzahl der zu extrahierenden Faktoren r
- Abbruchkriterium ϵ (> 0 , beliebig klein)

2. Es wird die $(k+1)$ -te Iteration betrachtet:

Bestimme:

- Matrix $\underline{D}$ je nach anzuwendender Methode
- Matrizen $\underline{M}$ und $\underline{L}$ nach (2.17.)
- Matrix $\underline{A}$ nach (2.18.)
- Matrix der neuen Kommunalitäten nach (2.20.)
- Euklidischen Abstand zwischen dem Vektor der alten und dem Vektor der neuen Kommunalitäten. Ist dieser $> \epsilon$, so erfolgt neue Iteration, sonst Abbruch des Verfahrens.

Der Algorithmus benötigt häufig 100 und mehr Iterationen. Konvergenz wurde für Lösungen vom Typ 2 und vom Typ 3 nicht nachgewiesen (McDonald 1970), für Lösungen vom Typ 1 ist sie bewiesen (vgl. Abschnitt 2.2.3. dieser Arbeit).

Nur erwähnt werden soll, daß obiger Lösungsalgorithmus von Hemmerle (1965) und Derflinger (1979) verbessert wurde, so daß er wesentlich weniger Rechenzeit benötigt. Das Verfahren ist bei Arminger (1979, S.76ff) ausführlich dargestellt.

2.6. Vereinheitlichte Darstellung als Minimierungsproblem gewichteter Quadratsummen

Aus den Ergebnissen des Abschnitts 2.5. ergibt sich wegen Satz 1.2 nach kurzer Rechnung, daß durch Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{H}$, die (2.17.) bis (2.20.) erfüllen, folgende Quadratsumme minimiert wird ($r_{ii} = h_i^2$):

$$Q' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{r_{ij}}{d_i d_j} - \sum_{\rho=1}^r \frac{a_{i\rho} \cdot a_{j\rho}}{d_i \cdot d_j} \right)^2$$

Da Q' bezüglich $\underline{H}$ das Minimum annimmt, wenn (2.20.) erfüllt ist, wird dann auch minimiert:

$$Q = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\left(r_{ij} - \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho} \cdot a_{j\rho} \right)^2}{d_i^2 \cdot d_j^2} \quad (2.21)$$

Wird (2.21.) bezüglich $\underline{A}$ minimiert, so wird das Ergebnis i.a. nicht die Bedingungen für das Faktorisierungsproblem (2.19) erfüllen. Dies läßt sich jedoch durch eine orthogonale Rotation im Raum der durch die Minimierung von (2.21.) extrahierten Faktoren erreichen. Die Kommunalitäten werden dadurch nicht beeinflusst. Diese ergeben sich über (2.20.), wobei $\underline{A}$ jeweils eine der folgenden Quadratsummen minimiert:

Typ 1:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \left(r_{ij} - \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho} a_{j\rho} \right)^2 \quad (2.22a)$$

Typ 2: (vgl. Hemmerle 1965)

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \left(r_{ij} - \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho} a_{j\rho} \right)^2 / \left[\left(1 - \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^2 \right) \cdot \left(1 - \sum_{\rho=1}^r a_{j\rho}^2 \right) \right] \quad (2.22b)$$

Typ 3:

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (r_{ij} - \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho} a_{j\rho})^2 / \left[\left(\sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^2 \right) \cdot \left(\sum_{\rho=1}^r a_{j\rho}^2 \right) \right] \quad (2.22c)$$

Typ 1 gewichtet also alle Abweichungen gleich; Typ 2 bzw. Typ 3 gewichtet stärker bzw. schwächer die Abweichungen mit großen Kommunalitäten und kleinen Einzelrestfaktorladungen.

Gilt $0 < h_i^2 < 1$ für alle i , $i=1(1)m$ und $Q_1 = 0$, so spielt die Gewichtung keine Rolle, Q_2 und Q_3 sind ebenfalls Null. Das bedeutet: Lassen sich die Korrelationen vollständig reproduzieren, so hat die gewählte Methode keinen Einfluß auf das Ergebnis.

Diese Darstellung erlaubt aber vor allem, die Faktorenlösungen auf Eindeutigkeit zu untersuchen.

2.7. Über die Eindeutigkeit der Faktorenlösungen

2.7.1. Problemstellung

Der in Abschnitt 2.5. dargestellte Algorithmus setzt Anfangsschätzungen der Kommunalitäten voraus, die innerhalb gewisser Grenzen grundsätzlich beliebig sind. Von großer Bedeutung für die Beurteilung der Faktorenanalyse ist nun die Frage, ob verschiedene Anfangsschätzungen stets zu gleichen Ergebnissen führen, ob also die Lösungen eindeutig sind.

Unerheblich sind dabei verschiedene Lösungen, die nur aufgrund der Änderung der Vorzeichen einer oder mehrerer Spalten von $\underline{A}$ entstehen. Wie man aus (2.22a) bis (2.22c) sofort ersieht, minimiert mit einer Matrix $\underline{A}$ beispielsweise auch die Matrix $-\underline{A}$ die betreffende Quadratsumme, was aber auf die Interpretation der Faktoren keinen Einfluß hat.

2.7.2. Notwendige Voraussetzung für die Eindeutigkeit

Da die behandelten Verfahren Quadratsummen reeller Zahlen minimieren (vgl. Abschnitt 2.6.), liefern sie auf keinen Fall eindeutige Lösungen, wenn es mehrere Matrizen $\underline{A}$ gibt, für die die entsprechende Quadratsumme Null wird. Q_1 , Q_2 und Q_3 werden aber Null, wenn $\underline{R}_h = \underline{A}\underline{A}'$ und $0 < h_i^2 < 1$ für alle i , $i=1(1)m$ gilt. Von Ledermann (1937) stammt der Beweis, daß es unendlich viele Lösungen für die Kommunalitäten und damit Matrizen $\underline{A}$ mit $\underline{R}_h = \underline{A}\underline{A}'$ gibt, wenn

$$r > 0,5 \cdot [2m + 1 - (8m + 1)^{0,5}] \quad (2.23.)$$

Bei Gültigkeit von (2.23.) haben Q_1 , Q_2 und Q_3 also unendlich viele Minima. Notwendige Voraussetzung für die Eindeutigkeit der Lösung ist also, daß

$$r \leq 0,5 \cdot [2m + 1 - (8m + 1)^{0,5}] \quad (2.24.)$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für den Fall gilt, daß rechts eine natürliche Zahl steht.

Es kann daher nicht überraschen, wenn Wrigley (1959) für eine 11x11-Korrelationsmatrix und 9 Faktoren bei verschiedenen Startwerten für die Kommunalitäten verschiedene Lösungen der IHFM erhält.

2.7.3. Iterierte Hauptfaktorenlösung und Minres-Lösung

2.7.3.1. Der Fall dreier Variabler

Einer allgemeinen Analyse zugänglich erwies sich die Minres-Zielfunktion (2.22a) im Fall dreier Variabler und eines Faktors ((2.24.) ist damit er-

füllt).

Werden zur Vereinfachung die zweiten Indices an den Faktorladungen weggelassen, so wird (2.22a) zu:

$$Q_1 = (r_{12} - a_1 a_2)^2 + (r_{13} - a_1 a_3)^2 + (r_{23} - a_2 a_3)^2$$

Es wird angenommen, daß keine Korrelation gleich Null ist, was bei Stichprobenkorrelationskoeffizienten mit Wahrscheinlichkeit 1 erfüllt ist.

Wird die Bedingung $0 \leq h_i^2 \leq 1$, $i=1,2,3$, zunächst nicht berücksichtigt, dann ergeben sich die notwendigen Bedingungen für ein Minimum von Q_1 durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen:

$$(r_{12} - a_1 a_2) a_2 + (r_{13} - a_1 a_3) a_3 = 0 \quad (\text{I})$$

$$(r_{12} - a_1 a_2) a_1 + (r_{23} - a_2 a_3) a_3 = 0 \quad (\text{II})$$

$$(r_{13} - a_1 a_3) a_1 + (r_{23} - a_2 a_3) a_2 = 0 \quad (\text{III})$$

Die Lösungen der notwendigen Bedingungen sollen untersucht werden.¹⁾ Die Analyse erfolgt in mehreren Schritten.

1. Zunächst wird angenommen: $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$.

Dann lassen sich die notwendigen Bedingungen umformen zu:

$$(r_{12} - a_1 a_2) a_1 a_2 + (r_{13} - a_1 a_3) a_1 a_3 = 0 \quad (\text{Ia})$$

$$(r_{12} - a_1 a_2) a_1 a_2 + (r_{23} - a_2 a_3) a_2 a_3 = 0 \quad (\text{IIa})$$

$$(r_{13} - a_1 a_3) a_1 a_3 + (r_{23} - a_2 a_3) a_2 a_3 = 0 \quad (\text{IIIa})$$

¹⁾ Bei der Herleitung der Lösungen war mir Herr Dipl.-Math. O. Hass, Nürnberg, behilflich.

Dies ergibt wegen $a_i \neq 0$, $i=1,2,3$:

$$\text{Ia-IIa+IIIa: } r_{13} - a_1 a_3 = 0 \rightarrow r_{13} = a_1 a_3$$

$$\text{ebenso: } r_{12} = a_1 a_2 \text{ und } r_{23} = a_2 a_3$$

Nach kurzer Rechnung erhält man (das Vorzeichen wird später berücksichtigt) die Lösung L1:

$$|a_1| = (r_{12} r_{13} / r_{23})^{1/2};$$

$$|a_2| = (r_{23} r_{12} / r_{13})^{1/2};$$

$$|a_3| = (r_{13} r_{23} / r_{12})^{1/2};$$

L1 ist nur dann reell, wenn alle Korrelationen positiv sind oder zwei Korrelationen negativ sind und eine Korrelation positiv ist.

2. Nun sei: $a_1=0$; $a_2 \neq 0$; $a_3 \neq 0$.

Dann lauten die notwendigen Bedingungen:

$$r_{12} a_2 + r_{13} a_3 = 0 \quad (\text{Ib})$$

$$r_{23} - a_2 a_3 = 0 \quad (\text{IIb})$$

Umformung ergibt die Lösung L2:

$$a_1 = 0; |a_2| = (-r_{13} r_{23} / r_{12})^{1/2};$$

$$|a_3| = (-r_{12} r_{23} / r_{13})^{1/2};$$

Analog erhält man die Lösung L3:

$$|a_1| = (-r_{13} r_{23} / r_{12})^{1/2};$$

$$a_2 = 0; |a_3| = (-r_{13} r_{23} / r_{12})^{1/2};$$

und L4:

$$|a_1| = (-r_{12}r_{23}/r_{13})^{1/2};$$

$$|a_2| = (-r_{12}r_{13}/r_{23})^{1/2}; a_3 = 0;$$

L2 bis L4 sind nur dann reell, wenn alle Korrelationen negativ sind oder zwei Korrelationen positiv sind und eine Korrelation negativ ist.

3. Werden zwei Faktorladungen gleich Null vorausgesetzt, so ergibt sich sofort die Lösung L5:

$$a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = 0;$$

Tabelle 2:

Vorzeichen der Lösungen in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Korrelationen

Vorzeichen der Korrelationen			Vorzeichen der Lösungen (n.r.=nicht reell)								
r_{12}	r_{13}	r_{23}	L1			L2		L3		L4	
			a_1	a_2	a_3	a_2	a_3	a_1	a_3	a_1	a_2
+	+	+	+	+	+	n.r.		n.r.		n.r.	
			-	-	-						
-	+	+	n.r.			+	+	+	+	-	+
						-	-	-	-	+	-
+	-	+	n.r.			+	+	-	+	+	+
						-	-	+	-	-	-
+	+	-	n.r.			-	+	+	+	+	+
						+	-	-	-	-	-
-	-	+	}	+	+	}	}	}	}	}	}
-	+	-		-	-						
+	-	-		-	-						
-	-	-	n.r.			+	-	+	-	+	-
						-	+	-	+	-	+

Lesebeispiel:

Wenn r_{12} , r_{13} und r_{23} positiv sind, dann sind L2, L3 und L4 nicht reell. Für L1 gilt:

entweder $a_1 > 0$ und $a_2 > 0$ und $a_3 > 0$

oder $a_1 < 0$ und $a_2 < 0$ und $a_3 < 0$.

4. Die Vorzeichen der Lösungen in Tabelle 2 ergeben sich aus den entsprechenden Gleichungssystemen.

Beispiel: Sei $r_{12} < 0$; $r_{13} > 0$; $r_{23} > 0$;

Damit folgt für L2 aus Ib und aus IIb, daß a_2 und a_3 gleiches Vorzeichen haben müssen.

5. In einem weiteren Schritt wird gezeigt, daß nur L1 ein Minimum ist; L2 bis L5 sind Sattelpunkte. Hierzu wird die Hesse-Matrix (Matrix der 2. Ableitungen) gebildet. Diese hat (bis auf den Faktor 2, der für die folgende Untersuchung unerheblich ist) die Form

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} a_2^2 + a_3^2 & 2a_1a_2 - r_{12} & 2a_1a_3 - r_{13} \\ 2a_1a_2 - r_{12} & a_1^2 + a_3^2 & 2a_2a_3 - r_{23} \\ 2a_1a_3 - r_{23} & 2a_2a_3 - r_{23} & a_1^2 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

Nun gilt: Ein Punkt, der die notwendigen Bedingungen für ein Minimum erfüllt, ist nur dann ein relatives oder absolutes Minimum, wenn $\underline{H}$ an dieser Stelle positiv (semi-) definit ist (Horst 1979, S.40). $\underline{H}$ ist weiter genau dann positiv semidefinit, wenn sämtliche Hauptabschnittsdeterminanten von $\underline{H}$ nicht negativ sind (Künzi/Krelle 1962, S.33).

a) L1 führt nach kurzer Rechnung zu folgender Hesse-Matrix:

$$\underline{H}_1 = \begin{bmatrix} r_{23}r_{12}/r_{13} + r_{13}r_{23}/r_{12} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{12}r_{13}/r_{23} + r_{13}r_{23}/r_{12} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{12}r_{13}/r_{23} + r_{12}r_{23}/r_{13} \end{bmatrix}$$

Ist L1 reell, so sind sämtliche Hauptabschnittsdeterminanten von $\underline{H}_1$ positiv. So erhält man für die erste zweireihige Hauptabschnittsdeterminante:

$$r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{13}^2 r_{23}^2 / r_{12}^2$$

und für die Determinante von $\underline{H}_1$: $4r_{12}r_{13}r_{23}$.

b) L2 ergibt die Hesse-Matrix

$$\underline{H}_2 = \begin{bmatrix} -r_{13}r_{12}/r_{23} & r_{12} & -r_{13} \\ r_{12} & -r_{12}r_{23}/r_{13} & -r_{23} \\ -r_{13} & -r_{23} & -r_{12}r_{13}/r_{23} \end{bmatrix}$$

Man erhält: $|\underline{H}_2| = 2r_{12}r_{13}r_{23} < 0$, wenn L2 reell.

Ebenso läßt sich zeigen, daß L3 und L4 für reelle Lösungen zu Hesse-Matrizen mit negativen Determinanten führen.

c) L5 führt zu der Hesse-Matrix:

$$\underline{H}_5 = \begin{bmatrix} 0 & -r_{12} & -r_{13} \\ -r_{12} & 0 & -r_{23} \\ -r_{13} & -r_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

deren erste zweireihige Hauptabschnittsdeterminante $-r_{12}^2 < 0$ ergibt.

6. Abschließend soll ein numerisches Beispiel die untersuchten Zusammenhänge verdeutlichen. Gegeben sei die Korrelationsmatrix

$$\underline{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0,36 & 0,12 \\ -0,36 & 1 & 0,09 \\ 0,12 & 0,09 & 1 \end{bmatrix}$$

(Die Korrelationsmatrizen der Beispiele werden durchnummeriert, um auf sie später zurückgreifen zu können.)

Die Lösung L1 ist nicht reell. Tabelle 3 zeigt die Lösungen L2 bis L4, Tabelle 4 die Minima von Q_1 . Die Sattelpunkte sind mit S1 bis S6, die Minima mit M1 bis M6 bezeichnet. Die Minima ergeben sich, wenn Q_1 unter der Nebenbedingung $0 \leq h_1^2 \leq 1$, was hier gleichwertig ist mit $-1 \leq a_1 \leq 1$, ($i=1,2,3$) minimiert wird. Sie sind nicht Lösungen der Gleichungen (I), (II) und (III).

Tabelle 3:

Sattelpunkte von Q_1 bei Zugrundelegung von $\underline{R}_1$

	L2		L3		L4	
	S1	S2	S3	S4	S5	S6
a_1	0,0	0,0	0,1732	-0,1732	-0,5196	0,5196
a_2	0,1732	-0,1732	0,0	0,0	0,6928	-0,6928
a_3	0,5196	-0,5196	0,6928	-0,6928	0,0	0,0
Q_1	0,1440		0,1377		0,0225	

Tabelle 4:

Minima von Q_1 bei Zugrundelegung von $\underline{R}_1$

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
a_1	-0,3543	0,3543	1,0	-1,0	0,1005	-0,1005
a_2	1,0	-1,0	-0,3507	0,3507	0,0533	-0,0533
a_3	0,0422	-0,0422	0,0787	-0,0787	1,0	-1,0
Q_1	0,0205		0,0156		0,1352	

Die Abbildungen 2 und 3 veranschaulichen die Zielfunktion Q_1 . Hierzu wurde ein Raster von Punkten in der $(a_1; a_2)$ -Ebene vorgegeben; a_3 wurde dann so bestimmt, daß Q_1 bezüglich a_3 unter der Nebenbedingung $-1 \leq a_3 \leq 1$ minimiert wird. Im einzelnen ergibt sich a_3 wegen (III) wie folgt:

Bestimme $a_3^* = (r_{13}a_1 + r_{23}a_2)/(a_1^2 + a_2^2)$

Wenn $a_3^* < -1$, setze $a_3 = -1$;

wenn $a_3^* > 1$, setze $a_3 = 1$;

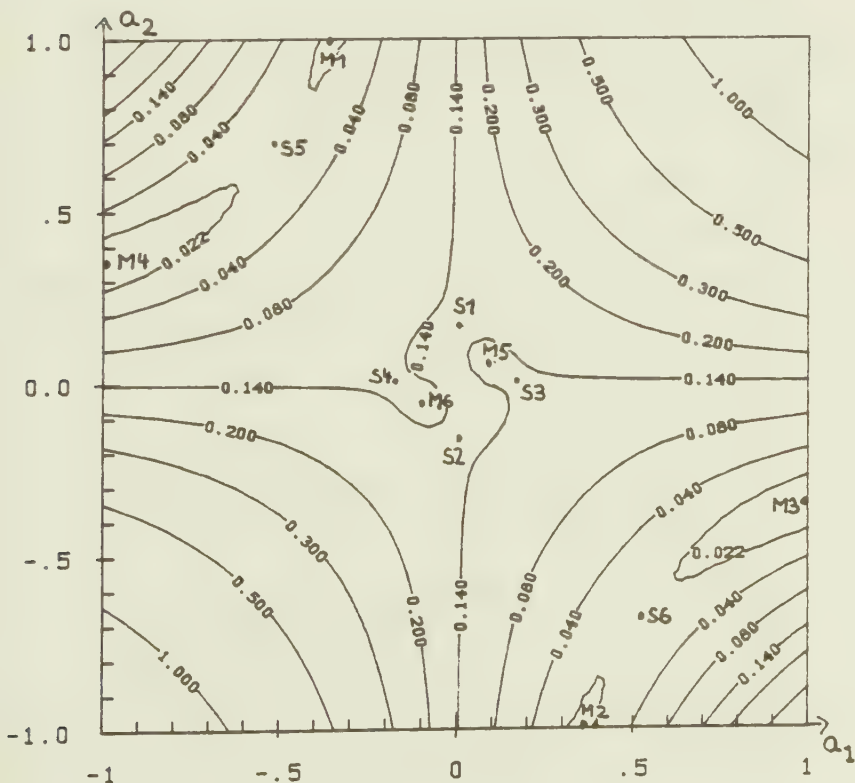
wenn $-1 \leq a_3^* \leq 1$, setze $a_3 = a_3^*$.

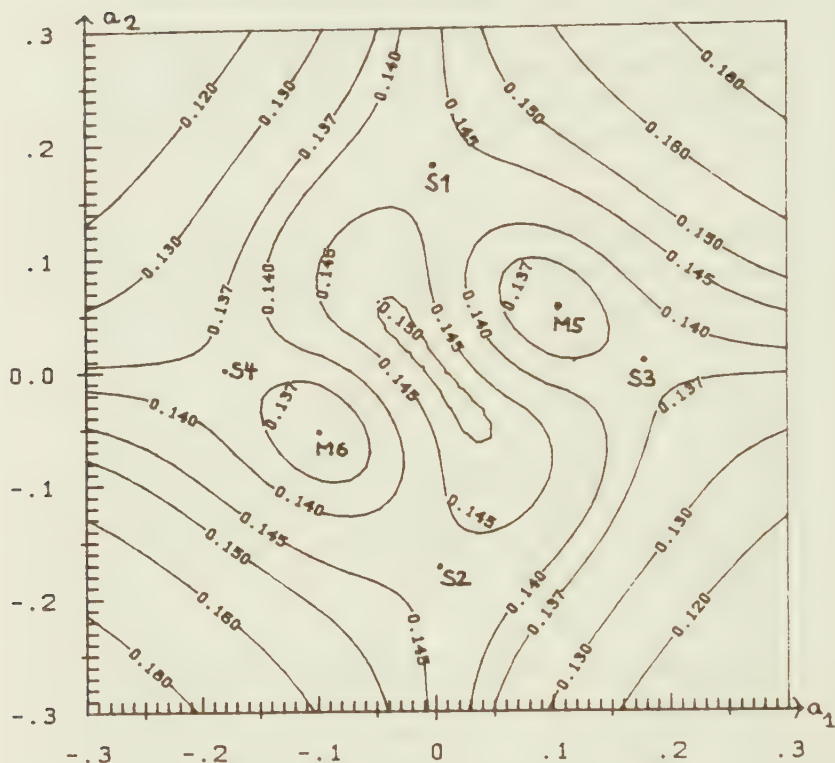
Die Zeichnungen zeigen einige Verbindungslinien von Punkten in der $(a_1; a_2)$ -Ebene, die jeweils zu gleichen Werten von Q_1 führen.

Abbildung 2 und Abbildung 3:

Höhenlinien von Q_1 bei Zugrundelegung von R_1 und nach Minimierung bezüglich a_3 im zulässigen Bereich.

Abbildung 2:





2.7.3.2. Beispiel für multiple Minima im Innern des zulässigen Bereichs

Wrigley (1959), der als einziger die Frage der Eindeutigkeit der IHFM näher untersucht hat, vermutet aufgrund rechnerischer Erfahrung, daß bei Gültigkeit des Ungleichheitszeichens in (2.24.) die IHFM unabhängig vom Startwert stets zu einer eindeutigen Lösung führt. Weiter legen die Ergebnisse des vori-

gen Abschnitts die Vermutung nahe, daß nur dann mehrere Minima auftreten, wenn alle Minima am Rand des zulässigen Bereichs liegen. Dann wäre ein Minimum von Q_1 innerhalb des zulässigen Bereichs mit Sicherheit das absolute Minimum.

Beide Vermutungen gelten nicht allgemein, wie durch ein Gegenbeispiel gezeigt wird. Sei

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,127 & 0,130 & 0,050 \\ 0,127 & 1 & 0,060 & 0,132 \\ 0,130 & 0,060 & 1 & -0,129 \\ 0,050 & 0,132 & -0,129 & 1 \end{bmatrix}$$

R_2 ist positiv definit. Der minimale Rang von R_2 ist 2. Es wird $r=1$ gewählt. Q_1 hat dann (außer der trivialen Lösung $a_i=0$, $i=1(1)4$) zwei Minima und einen Sattelpunkt im Innern des zulässigen Bereichs (vgl. Tabelle 5).

Tabelle 5:

Minima und Sattelpunkt von Q_1 bei Zugrundelegung von R_2 und $r=1$

	1. Minimum		2. Minimum		Sattelpunkt	
a_1	0,4850	-0,4850	0,2564	-0,2564	0,4029	-0,4029
a_2	0,3057	-0,3057	0,5706	-0,5706	0,3773	-0,3773
a_3	0,1995	-0,1995	0,1021	-0,1021	0,1749	-0,1749
a_4	0,1055	-0,1055	0,1866	-0,1866	0,1413	-0,1413
Q_1	0,0340		0,0337		0,0341	

Diese Faktormuster würden sehr verschieden interpretiert werden.

Danach kann nur empfohlen werden, das Iterationsverfahren mit mehreren Startwerten durchzurechnen. Dadurch kann jedoch nur die Wahrscheinlichkeit, das absolute Minimum von Q_1 zu erhalten, erhöht werden.

2.7.4. Maximum-Likelihood- und Kanonische Faktorenanalyse

Die Aussagen über die Eindeutigkeit der Faktorenlösung vom Typ 2 in der Literatur sind spärlich. Lawley und Maxwell (1971, S.34, Übersetzung vom Verfasser) schreiben: "Mit Sicherheit kann man nur sagen, daß, wenn das gewählte Modell richtig ist, die Wahrscheinlichkeit für eine eindeutige Lösung gegen eins geht, wenn der Stichprobenumfang gegen unendlich geht." (Zum Beweis s. Kendall Stuart, Band 2, 1961, S.39ff). Das gewählte Modell ist aber nur dann richtig, wenn die Variablen multivariat normalverteilt sind und die Zahl der gemeinsamen Faktoren richtig bestimmt ist. Dies wird in der Realität nur in Ausnahmefällen der Fall sein, so daß die Aussage von Lawley und Maxwell von beschränktem Wert ist.

Tabelle 6:

Minima und Sattelpunkt von Q_2 bei Zugrundelegung von R_2 und $r=1$

	1. Minimum		2. Minimum		Sattelpunkt	
a_1	0,6435	-0,6435	0,1604	-0,1604	0,3795	-0,3795
a_2	0,2104	-0,2104	0,8171	-0,8171	0,3838	-0,3828
a_3	0,1882	-0,1882	0,0707	-0,0707	0,1653	-0,1653
a_4	0,0713	-0,0713	0,1570	-0,1570	0,1488	-0,1488
Q_2	0,0363		0,0355		0,0375	

Lawley und Maxwell (1971, S.34) berichten von zwei Beispielen, bei denen mehrere Minima von Q_2 am Rand des zulässigen Bereichs auftreten. Eines stammt von Jöreskog (1967), der im gleichen Artikel folgert, daß ein Minimum von Q_2 am Rand des zulässigen Bereichs u.U. nicht das absolute Minimum von ist.

Die Untersuchung von Q_2 bei Zugrundelegung von R_2

und $r=1$ ergab, daß auch ein Minimum im Innern des zulässigen Bereichs nicht das absolute Minimum sein muß (s. Tabelle 6). Diese Faktormuster würden wieder sehr verschieden interpretiert werden.

2.7.5. Alpha-Faktorenanalyse

Das Problem der Eindeutigkeit der Alpha-FA ist m.W. in der Literatur nicht behandelt. Auf die Matrix R_2 wurde das auf S.43 beschriebene und auch von Kaiser und Caffrey (1965) vorgeschlagene Verfahren mit $r=1$ angewendet. Beim ersten Versuch wurden die multiplen Korrelationskoeffizienten, beim zweiten Versuch Einsen als Startwerte für die Kommunalitäten gewählt. In beiden Fällen konvergierte das Verfahren auch nach 1000 (!) Iterationen nicht.

Die Minimumsuche mit "naglib"-Bibliotheksprogrammen des Regionalen Rechenzentrums Erlangen ergab mehrere Minima (s.Tabelle 7).

Auch bei der Alpha-FA kann man also durchaus nicht sicher sein, das absolute Minimum von Q_3 gefunden zu haben, wenn eine Lösung nicht am Rand des zulässigen Bereichs liegt.

Tabelle 7:

Minima von Q_3 bei Zugrundelegung von R_2 und $r=1$

	1. Minimum		2. Minimum		3. Minimum		4. Minimum	
a_1	,2952	-,2952	,5838	-,5838	,1623	-,1623	,4723	-,4723
a_2	,3258	-,3258	,1727	-,1727	,6183	-,6183	,9173	-,9173
a_3	,6614	-,6614	,4238	-,4238	1,0	-1,0	-1,0	1,0
a_4	,6084	-,6084	1,0	-1,0	,4003	-,4003	,1282	-,1282
Q_3	3,1113		2,9181		2,9447		3,3064	

KAPITEL 3: VERFAHREN MIT POSITIV SEMIDEFINITER RESTMATRIX $R_h - AA'$

3.1. Problemstellung

Die im vorigen Kapitel untersuchten Verfahren haben zwei wesentliche Eigenschaften gemeinsam:

1. Die Kommunalitäten und Faktorladungen werden so gewählt, daß eine gewichtete Quadratsumme der Abweichungen der Matrix AA' von der Matrix R_h minimiert wurde.
2. Das Ergebnis führt i.a. zu nicht positiv (semi-) definiter Restmatrix $R_h - AA'$, was dem Modell der FA widerspricht.

In diesem Kapitel werden Verfahren untersucht, die den unter 2. genannten Nachteil vermeiden. Dabei wird sich zeigen, daß die bestehenden Verfahren keine Abweichungsfunktion der Matrix AA' von der Matrix R_h minimieren, wenn r kleiner dem minimalen Rang von R ist.

Deshalb wird eine neue Methode der Faktorenanalyse vorgestellt, die beide Nachteile zu vermeiden sucht. Diese Lösung wird eingehender untersucht.

3.2. Bestehende Verfahren

3.2.1. Die Methode des minimalen Rangs

Thurstone (1947, S.283) fordert, die Kommunalitäten so zu wählen, daß R_h den kleinsten möglichen Rang hat, weil dann die Korrelationen durch die kleinste mögliche Anzahl von Faktoren vollständig erklärt werden können.

Da die Korrelationen als Stichprobenergebnisse Zufallsschwankungen unterliegen, kann der minimale Rang von R i.a. nach (1.8b) bestimmt werden. Die

algebraische Auflösung nach den Kommunalitäten ist bereits für $m=5$ unmöglich (Ledermann 1937). Tuk (1981) gibt für den Spezialfall, daß alle Korrelationen negativ sind, einen Lösungsalgorithmus an. Im allgemeinen Fall können die gesuchten Kommunalitäten durch eine der im zweiten Kapitel beschriebenen Verfahren bestimmt werden, wenn $r=s_{\min}$ gewählt wird.

Da der Rang durch geeignete Wahl der Kommunalitäten nur geringfügig reduziert werden kann (vgl. S.9), will Thurstone diese so bestimmen, daß der minimale Rang unter der Nebenbedingung vernachlässigbar kleiner Abweichungen der Matrix $\underline{AA'}$ von der Matrix $\underline{R_h}$ erreicht wird. Weiter soll $\underline{R_h}$ positiv (semi-) definit sein (Thurstone 1947, S.283).

Es ist also offensichtlich wieder an ein Minimierungsverfahren gedacht, das aber nicht weiter ausgeführt wird. Weder Zielfunktion noch Nebenbedingungen sind explizit genannt.

3.2.2. Die Methode von Guttman

Die Methode von Guttman (1957) wird nach Pawlik (1976, S.121ff) zitiert, da der Originalartikel auch über Fernleihe in den USA nicht erhältlich war.

Guttman verbesserte eine Methode von Kaiser und Tyron (auch dieser Artikel war nicht erhältlich), die aber bei empirischen Korrelationsmatrizen i.a. nicht konvergiert (Kaiser 1959).

Guttmans iterative Kommunalitätenschätzung hat positiv semidefinite Matrizen $\underline{R_h}$ zum Ziel. Sie läßt sich wie folgt beschreiben:

1. Gebe Startwerte für die Kommunalitäten vor. Guttman empfahl die multiplen Korrelationskoeffizienten jeder Variablen mit den $m-1$ anderen Variablen.

2. Die Kommunalitäten der $(j+1)$ -ten Iteration ergeben sich aus:

$$h_i^2(j+1) = h_i^2(j) - 0,5/(r_h^{ii}(j))$$

wobei $r_h^{ii}(j)$ das i -te Diagonalglied der Matrix $(R_h(j))^{-1}$ ist. $R_h(j)$ ergibt sich aus:

$$R_h(j) = R - I + H^2(j)$$

3. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn der euklidische Abstand zweier aufeinanderfolgender Kommunalitätenvektoren eine vorgegebene Grenze unterschreitet.

Da über Erfahrungen mit dieser Methode in der Literatur nichts berichtet wird, wurde sie an einer Korrelationsmatrix (Harman 1970, S.80) überprüft.

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & ,846 & ,805 & ,859 & ,473 & ,398 & ,301 & ,382 \\ ,846 & 1 & ,881 & ,826 & ,376 & ,326 & ,277 & ,415 \\ ,805 & ,881 & 1 & ,801 & ,380 & ,319 & ,237 & ,345 \\ ,859 & ,826 & ,801 & 1 & ,436 & ,329 & ,327 & ,365 \\ ,473 & ,376 & ,380 & ,436 & 1 & ,762 & ,730 & ,629 \\ ,398 & ,326 & ,319 & ,329 & ,762 & 1 & ,583 & ,577 \\ ,301 & ,277 & ,237 & ,327 & ,730 & ,583 & 1 & ,539 \\ ,392 & ,415 & ,345 & ,365 & ,629 & ,577 & ,539 & 1 \end{bmatrix}$$

Da während des Verfahrens Kommunalitäten größer 1 oder kleiner $1-1/r^{ii}$ (letztere liefern nicht positiv semidefinite Matrizen R_h , vgl. S.69f) wurde Schritt 2 leicht modifiziert:

- wenn $h_i^2(j) - 0,5/(r_h^{ii}(j)) < 1-1/r^{ii}$, setze $h_i^2(j+1) = 1-1/r^{ii}$

- wenn $h_1^{2(j)} - 0,5/(r_h^{ii(j)}) > 1$ setze $h_1^{2(j+1)} = 1$

wobei r^{ii} das i -te Diagonalglied von $\underline{R}^{-1}$ ist ($i=1(1)m$).

Tabelle 8

Ergebnisse der Anwendung der Methode von Guttman auf $\underline{R}_3$ (Anwendung 2 ergab nach über 5000 Iterationen keine Konvergenz)

Startwerte für Kommunalitäten			Endwerte für Kommunalitäten		Eigenwerte der Lösungsmatrix	
Anwendung			Anwendung		Anwendung	
1	2	3	1	3	1	3
1	,8162	,859	,8898	,8714	4,7997	4,4606
1	,8493	,881	,9889	,8826	1,5762	1,5185
1	,8006	,881	,8069	,8021	,2474	,1261
1	,7884	,859	,8643	,8889	,1499	,0970
1	,7488	,762	,7488	,8327	,0217	,0001
1	,6041	,762	,9211	,6054	,0001	,0001
1	,5622	,730	,7060	,6933	,0001	-,0650
1	,4778	,629	,4970	,4779	-,0719	-,0830

Aus Tabelle 8 ist zu entnehmen, daß

1. das Verfahren teilweise auch nach mehreren tausend Iterationen nicht konvergiert.
2. verschiedene Anfangsschätzungen i.a. zu verschiedenen Lösungen führen.
3. Lösungen nicht notwendigerweise positiv semidefinite Matrizen $\underline{R}_h$ ergeben.

Punkt 2 und 3 können nicht überraschen, da das Verfahren stets dann konvergiert, wenn $\underline{R}_h$ fast singular ist, weil dann r_h^{ii} gegen ∞ strebt. Die Methode erweist sich damit als ungeeignet.

3.2.3. Image-Faktorenanalyse

Die Image-Analyse wurde 1962 von Jöreskog entwickelt. Der Grundgedanke ist einfach: Da die multiplen Korrelationskoeffizienten die "best possible" (Guttman 1956) Schätzungen für die Kommunalitäten sind, aber nicht zu positiv (semi-) definiten Matrizen $\underline{R}_h$ führen (vgl. Abschnitt 3.2.4.2.), wird die Berechnung des multiplen Korrelationskoeffizienten so modifiziert, daß $\underline{R}_h$ positiv (semi-)definit wird. Die Kommunalitäten ergeben sich aus:

$$h_i^2 = 1 - K/r_{ii} \quad (i=1(1)m),$$

wobei r_{ii} wie im vorigen Abschnitt definiert ist und K eine Zahl ist, die so zu bestimmen ist, daß die resultierende Matrix $\underline{R}_h$ positiv (semi-)definit wird.

Jöreskog (1962) zeigt, daß K der kleinste Eigenwert der Matrix $(\text{diag } \underline{R}^{-1})^{1/2} \underline{R} (\text{diag } \underline{R}^{-1})^{1/2}$ ist.

Das Schätzverfahren soll an einem kleinen Beispiel verdeutlicht werden.

Gegeben sei

$$\underline{R}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0,36 & 0,12 \\ 0,36 & 1 & 0,09 \\ 0,12 & 0,09 & 1 \end{bmatrix}$$

Dann ist

$$\text{diag } \underline{R}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1,1592 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1518 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0172 \end{bmatrix}$$

und $(\text{diag } \underline{R}_4^{-1})^{1/2} \underline{R}_4 (\text{diag } \underline{R}_4^{-1})^{1/2} =$

$$= \begin{bmatrix} 1,1592 & 0,4160 & 0,1303 \\ 0,4160 & 1,1518 & 0,0974 \\ 0,1303 & 0,0974 & 1,1017 \end{bmatrix}$$

mit dem kleinsten Eigenwert $0,7375 = K$.

Damit ergeben sich die Kommunalitäten:

$$h_1^2 = 1 - 0,7375/1,1592 = 0,3638$$

$$h_2^2 = 1 - 0,7375/1,1518 = 0,3597$$

$$h_3^2 = 1 - 0,7375/1,1017 = 0,2750$$

Die entstehende Matrix $\underline{R}_h$ hat die Eigenwerte

$$l_1 = 0,7667, l_2 = 0,2318 \text{ und } l_3 = 0.$$

Das Beispiel zeigt, daß auch dieses Verfahren keine optimalen Lösungen liefert. Soll nämlich ein Faktor extrahiert werden, so kann dieser $\underline{R}_h$ nicht vollständig erklären, wie es der Fall ist, wenn als Kommunalitätenschätzungen 0,48, 0,27 und 0,03 gewählt werden.

3.2.4. Minimum-Trace und Constrained-Minimum-Trace Faktorenanalyse

3.2.4.1. Das Minimierungsproblem

Die Ansätze der Minimum-Trace FA (MTFA) und der Constrained-Minimum-Trace FA (CMTFA) gehen auf Ledermann (1939) zurück, wurden aber erst in den letzten Jahren in einer Reihe von Artikeln näher untersucht. (Eine gute Literaturübersicht gibt Shapiro 1982.)

Hintergrund ist ein von Bentler (1972) eingeführter Reliabilitätskoeffizient

$$\rho = 1 - \frac{\underline{e}' \underline{U}^2 \underline{e}}{\underline{e}' \underline{R} \underline{e}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m u_i^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m r_{ij}}$$

mit $\underline{e}' = (1, 1, \dots, 1)$

ρ kann als Maß dafür angesehen werden, inwieweit der Datensatz durch gemeinsame Faktoren erklärt ist. Die Obergrenze von ρ ist eins, eine kleinere Obergrenze kann nicht angegeben werden. Die Untergrenze ist gesucht; sie ist dadurch gekennzeichnet, daß bei positiv (semi-)definiten Matrizen $\underline{R}_H$ und $\underline{U}^2$

$$\sum_{i=1}^m u_i^2 \text{ maximal wird.}$$

Gleichwertig damit ist:

$$\sum_{i=1}^m h_i^2 \rightarrow \min! \quad (3.1a)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\underline{R} - \underline{U}^2 \text{ positiv (semi-)definit} \quad (3.1b)$$

$$u_i^2 \geq 0 \text{ für alle } i=1(1)m \quad (3.1c)$$

Wird nur (3.1b) berücksichtigt, so liegt eine Lösung nach der MTFA vor, wird zusätzlich (3.1c) beachtet, so liegt eine Lösung nach der CMTFA vor. Nach Jackson und Agunwamba (1977) ist (3.1c) i.a. keine aktive Restriktion; die Lösungen der MTFA und der CMTFA fallen dann zusammen. Im folgenden wird die CMTFA näher untersucht.

3.2.4.2. Eigenschaften des Minimierungsproblems

3.2.4.2.1. Konvexität des zulässigen Bereichs und Eindeutigkeit der Lösung

Eine für den Eindeutigkeitsbeweis wichtige Aussage enthält folgender Satz' (Della Riccia und Shapiro 1982):

Satz 3.1.:

Der durch (3.1b) und (3.1c) abgegrenzte zulässige Bereich der Kommunalitäten ist konvex.

Beweis:

1. Die Konvexität des durch (3.1c) umgrenzten Bereichs ist unmittelbar einsichtig.

2. Seien R_{h1} und R_{h2} zwei positiv semidefinite $m \times m$ -Matrizen mit gleichen Außerdiagonalgliedern und verschiedenen Kommunalitäten. Beide Matrizen erfüllen also (3.1b).

Dann gilt für beliebige $\underline{y}$: $\underline{y}' R_{h1} \underline{y} \geq 0$ und $\underline{y}' R_{h2} \underline{y} \geq 0$. Dann erfüllt auch $k \cdot R_{h1} + (1-k) \cdot R_{h2}$ mit $0 \leq k \leq 1$ (3.1b), denn es ist:

$$\begin{aligned} \underline{y}' \cdot (k \cdot R_{h1} + (1-k) \cdot R_{h2}) \cdot \underline{y} &= \\ &= k \cdot \underline{y}' \cdot R_{h1} \cdot \underline{y} + (1-k) \cdot \underline{y}' \cdot R_{h2} \cdot \underline{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Nach der Definition konvexer Bereiche (vgl. z.B. Künzi / Krelle 1962, S.34) ist damit auch der durch (3.1b) definierte Bereich konvex.

3. Die Schnittmenge zweier konvexer Mengen ist wieder konvex (Hadley 1964, S.38). Damit ist der durch (3.1b) und (3.1c) definierte Bereich konvex, was zu beweisen war.

Die Konvexität der Zielfunktion (3.1a) ist offensichtlich. Konvexe Funktionen über konvexen Bereichen haben aber nur ein Minimum (vgl. z.B. Hadley 1964, S.90). Damit ergibt sich sofort, daß MTFA und CMTFA eindeutige Lösungen haben (Berge, Snijders, Zegers 1981).

3.2.4.2.2. Untere Schranken für die Kommunalitäten

Zunächst soll bewiesen werden, daß die Kommunalitäten durch (3.1b) nach unten beschränkt sind. Dies ergibt sich aus folgendem

Satz 3.2.:

Wird eine Kommunalität verringert, so verringern sich alle Eigenwerte mit Ausnahme von denen, bei denen ein zugehöriger Eigenvektor in der Zeile, in der die Kommunalität verringert wird, eine Null besitzt. Diese verändern sich nicht.

Beweis:

1. Wird eine Kommunalität verringert, so werden die Eigenwerte nicht größer.

Dies ist die Folge eines Satzes, der nach Schmeißer und Schirmeier (1976, S.127) zitiert wird (dort befindet sich auch ein Beweis):

Seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ zwei symmetrische $m \times m$ -Matrizen mit den Eigenwerten $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$ und $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_m$. Dann gilt für die Eigenwerte $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_m$ der Matrix $\underline{C} := \underline{A} + \underline{B}$ die Abschätzung

$$\max_{i+j \geq m+k} (a_i + b_j) \leq c_k \leq \min_{i+j \leq k+1} (a_i + b_j)$$

Wird nun $\underline{A}$ gleich $\underline{R}_h$ mit den Eigenwerten $1_1 \geq 1_2 \geq \dots \geq 1_m$ gesetzt und $\underline{B}$ sei die Matrix der Ver-

änderung der (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) ersten Kommunalität, also

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } d > 0$$

$\underline{B}$ hat somit die Eigenwerte $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{m-1} = 0$ und $\beta_m = -d$. Damit folgt unmittelbar für die Eigenwerte $l_1^* \geq l_2^* \geq \dots \geq l_m^*$ der Matrix

$$\underline{R}_h^* := \underline{R}_h + \underline{B}:$$

$$\begin{aligned} l_1 &\leq l_1^* \leq l_2 \\ l_2 &\leq l_2^* \leq l_3 \\ &\dots \dots \dots \\ l_m &\leq l_m^* \leq -d \end{aligned}$$

2. Ein Eigenwert ändert sich genau dann nicht, wenn gilt:

$$(\underline{R}_h + \underline{B}) \cdot (\underline{q} + \underline{v}) = l \cdot (\underline{q} + \underline{v})$$

wobei $\underline{q}$ und $\underline{l}$ nichttriviale Lösungen von $\underline{R}_h \underline{q} = l \underline{q}$ sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können $\underline{q}$ und $\underline{q} + \underline{v}$ als standardisiert angenommen werden. Damit ergibt sich:

$$\underline{q}' \underline{R}_h \underline{q} + \underline{q}' \underline{B} \underline{q} + \underline{q}' \underline{R}_h \underline{v} + \underline{q}' \underline{B} \underline{v} = \underline{q}' \underline{l} \underline{q} + \underline{q}' \underline{l} \underline{v}$$

Oder:

$$1 - d \cdot q_1^2 + \underline{q}' \underline{l} \underline{v} - d q_1 v_1 = 1 + \underline{q}' \underline{l} \underline{v}$$

$$d q_1^2 + d q_1 v_1 = 0 \quad / : (d q_1)$$

$$q_1 + v_1 = 0$$

Mit $y_i = q_i + v_i$ gilt somit: $y_1 = 0 \rightarrow$

$$(\underline{R}_h + \underline{B}) \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Auflösung ergibt: $\underline{R}_h \cdot \underline{y} = 1 \cdot \underline{y}$, woraus folgt, daß $\underline{y}$ Eigenvektor von $\underline{R}_h$ zum Eigenwert 1 ist, was zu beweisen war.

Anmerkung:

Dieser Satz ergibt sich schon deshalb nicht aus (2.13.), da diese Ableitung unter der Voraussetzung hergeleitet wurde, daß nur einfache Eigenwerte auftreten.

Damit wird es sinnvoll, untere Schranken für die Kommunalitäten des zulässigen Bereichs zu bestimmen (Jackson und Agunwamba 1977).

1. Es muß sein: $h_i^2 \geq 0$ für alle $i, i=1(1)m$.

Beweis:

Sei $h_i^2 < 0$ und sei $\underline{v}' = (0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0)$ ein $m \times 1$ -Vektor mit $v_i \neq 0$. Dann ist:

$$\underline{v}' \cdot \underline{R}_h \cdot \underline{v} = v_i^2 \cdot h_i^2 < 0;$$

damit ist $\underline{R}_h$ nicht positiv (semi-)definit.

2. Es muß sein: $h_i^2 \geq r_{ik}^2$ für alle $i=1(1)m$, $k=1(1)m$, $i \neq k$.

Beweis:

Sei $\underline{v}' = (0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0, v_k, 0, \dots, 0)$ ein $m \times 1$ -Vektor mit $v_i = 1$ und $v_k = -r_{ik}$. Dann ist:

$$\underline{v}' \cdot \underline{R}_h \cdot \underline{v} = h_i^2 - 2 \cdot r_{ik}^2 + r_{ik}^2 \cdot h_k^2 \leq$$

$$\leq h_i^2 - r_{ik}^2$$

Damit R_h positiv (semi-)definit ist muß also gelten:

$$h_i^2 - r_{ik}^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad h_i^2 \geq r_{ik}^2$$

3. Es muß sein: $h_i^2 \geq 1/r_{ii}$ für alle $i=1(1)m$, wobei r_{ii} das i -te Diagonalglied der Inversen von R ist.

Beweis:

a) Zunächst wird bewiesen, daß R_h positiv semidefinit ist, wenn $h_j^2 = 1$ für alle $j, j=1(1)m, j \neq i$ und h_i^2 so bestimmt wird, daß $|R_h| = 0$.

aa) Die Matrix R_{ii} , die durch Streichung der i -ten Zeile und der i -ten Spalte von R entsteht, ist eine Korrelationsmatrix und daher positiv semidefinit. Damit r_{ii} bestimmt werden kann, muß R_{ii} als positiv definit vorausgesetzt werden. Die Eigenwerte von R_{ii} seien $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_{m-1} > 0$.

bb) Nun wird ein Satz benötigt, der nach Franklin (1968, S.149) zitiert wird (dort befindet sich auch ein Beweis):

Sei A eine symmetrische $m \times m$ -Matrix mit $m > 1$ und sei B die $(m-1) \times (m-1)$ -Matrix, die aus A durch Streichung der i -ten Zeile und Spalte entsteht.

Seien weiter $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$ die Eigenwerte von A und $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{m-1}$ die Eigenwerte von B . Dann gilt:

$$a_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{m-1} \geq a_m$$

Sind $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m \geq 0$ die Eigenwerte von R_h , dann ergibt die Anwendung dieses Satzes, daß

gilt:

$$1_1 \geq f_1 \geq 1_2 \geq f_2 \geq \dots \geq f_{m-1} \geq 1_m$$

Wegen $|R_h| = 0$ muß ein Eigenwert 0 sein; wegen $f_{m-1} > 0$ ist dies aber der kleinste Eigenwert von R_h ; R_h ist also positiv semidefinit.

b) Aus $|R_h| = 0$ ergibt sich:

$$h_i^2 \cdot |R_{ii}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m r_{ij} \cdot |R_{ij}| \cdot (-1)^{i+j} = 0$$

$$h_i^2 = \frac{|R_{ii}| - |R|}{|R_{ii}|} = 1 - \frac{1}{r_{ii}} \rightarrow h_i^2 = 1 - \frac{1}{r_{ii}}$$

Da für alle h_j^2 , $j=1(1)m$, $j \neq i$ der maximale Wert eingesetzt war, muß h_i^2 mindestens $1-1/r_{ii}$ sein. Wegen Satz 3.2. muß i.a. h_i^2 entsprechend größer sein, wenn für eine andere Kommunalität ein niedriger Wert eingesetzt wird.

Damit ist der Beweis vollständig.

Die drei unteren Schranken sind die bereits von Guttman (1954, 1956) aufgezeigten und auf anderem Wege bewiesenen unteren Schranken für die Kommunalitäten, wobei die dritte untere Schranke bereits früher von Roff (1936) und Dwyer (1939) bewiesen wurde. Guttman hat auch gezeigt, daß folgende Ungleichung gilt:

1. Schranke $\leq$ 2. Schranke $\leq$ 3. Schranke

und hat $1-1/r_{ii}$ entsprechend als die "best possible" Kommunalitätenschätzung bezeichnet.

Der Beweis zur 3. Schranke läßt unschwer erkennen, daß auch diese Schätzung zu einer nicht positiv

semidefiniten Matrix R_h führt, wenn sie für alle Kommunalitäten eingesetzt wird: Wird sie nur für eine Kommunalität eingesetzt, während die anderen Kommunalitäten den Wert eins annehmen, so gilt $l_m=0$. Werden nun auch die anderen Kommunalitäten auf $1-1/r_{ii}$ vermindert, so muß sich wegen Satz 3.2. (bis auf für praktische Fälle auszuschließende Sonderfälle) auch l_m vermindern, wodurch mindestens ein Eigenwert negativ wird.

Kann diese untere Schranke nicht berechnet werden, da R singular ist, so ergibt sich auf gleichem Weg sofort, daß $h_i^2 = 1$ für alle i , $i=1(1)m$ eine analoge untere Schranke ergibt, während die in der Praxis übliche Vorgehensweise, dann

$$h_i^2 = \max_{i \neq k} |r_{ik}| \quad k=1(1)m$$

zu setzen, regelmäßig zu nicht positiv semidefiniten R_h führt.

3.2.4.3. Beurteilung

Die Restriktionen der CMTFA sind vom Modell der FA geboten. Die Zielfunktion ist jedoch nicht durch die Zielsetzung der FA zu begründen: Zweck ist ja eine Erklärung von m Variablen durch r Faktoren. Dagegen minimiert die CMTFA die Summe der Kommunalitäten, also die Varianz, die durch die gemeinsamen Faktoren erklärt wird.

Bentler und Woodward (1980) empfehlen die CMTFA auch hauptsächlich als preiswerte Alternative zu den in Kapitel 2 behandelten Verfahren, wenn über die Zahl der Faktoren nichts bekannt ist.

3.3. Die Minvarlösung der Faktorenanalyse

3.3.1. Grundgedanke

Die behandelten Verfahren der FA sind dadurch gekennzeichnet, daß

entweder eine Abweichungsnorm der Matrix $\underline{AA}'$ von der Matrix $\underline{R}_h$ minimiert wird und die Restmatrix nicht positiv semidefinit ist (- dies waren die Verfahren des 2. Kapitels -)

oder die Restmatrix positiv semidefinit ist; dann wird aber keine Abweichungsnorm der Matrix $\underline{AA}'$ von der Matrix $\underline{R}_h$ minimiert (- dies waren die in Abschnitt 3.2. behandelten Verfahren).

Erstrebenswert ist aber ein Verfahren, das

1. eine positiv semidefinite Restmatrix liefert und
2. eine interpretierbare Abweichungsnorm der Matrix $\underline{AA}'$ von der Matrix $\underline{R}_h$ minimiert.

Ausgangspunkt der Minvar-Lösung ist das Modell der FA, das in Summenschreibweise folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$z_{ij} = \sum_{\rho=1}^s a_{i\rho} \cdot p_{\rho j} + u_i \cdot p_{s+i;j} \quad (i=1(1)m, j=1(1)n)$$

Im allgemeinen werden $r < s$ Faktoren extrahiert. Dann kann geschrieben werden:

$$z_{ij} = \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho} \cdot p_{\rho j} + \sum_{\rho=r+1}^s a_{i\rho} \cdot p_{\rho j} + u_i \cdot p_{s+i;j}$$

Werden orthogonale Faktoren vorausgesetzt, so kann die Gesamtvarianz aller m Variablen wie folgt zerlegt werden (vgl. Abschnitt 1.1.2.):

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n z_{ij}^2 = m = \sum_{i=1}^m \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{\rho=r+1}^s a_{i\rho}^2 + \sum_{i=1}^m u_i^2$$

Damit ist die durch das verwendete Modell mit r gemeinsamen Faktoren und m Einzelrestfaktoren erklärte Varianz:

$$V_e = \sum_{i=1}^m \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^2 + \sum_{i=1}^m u_i^2$$

und die durch das Modell nicht erklärte Varianz:

$$V_u = \sum_{i=1}^m \sum_{\rho=r+1}^s a_{i\rho}^2$$

Der Grundgedanke der Minimum-Varianz- (= Minvar-) FA besteht nun darin, die nicht durch das Modell erklärte Varianz unter den Nebenbedingungen zu minimieren, daß sowohl R_h als auch $\underline{u}^2$ positiv (semi-) definit sind.

3.3.2. Die Zielfunktion und ihre Eigenschaften

Die unerklärte Varianz kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$V_u = m - \sum_{i=1}^m \sum_{\rho=1}^r a_{i\rho}^2 - \sum_{i=1}^m u_i^2$$

V_u ist also abhängig von

- den Faktorladungen $a_{i\rho}$, $i=1(1)m$, $\rho=1(1)r$ und
- den Einzelrestvarianzen u_i^2 .

Die Hauptfaktorenlösung maximiert bei gegebenen Kommunalitäten

$$\sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^r a_{ip}^2$$

Damit wird bei gegebenen Kommunalitäten auch V_u minimiert. Die Minvar-FA bezieht die Kommunalitäten in das Minimierungsverfahren ein und kann insofern als Weiterentwicklung der Hauptfaktorenmethode angesehen werden.

Sind die Faktorladungen nach der Hauptfaktorenmethode bestimmt, dann kann wegen

$$\sum_{i=1}^m a_{ip}^2 = 1_p \quad (p=1(1)s)$$

$Q := V_u$ auch folgendermaßen geschrieben werden, wobei $1_1 > 1_2 > \dots > 1_m$ die Eigenwerte von $\underline{R}_h$ sind:

$$Q = m - \sum_{i=1}^m u_i^2 - \sum_{p=1}^r 1_p = \sum_{p=r+1}^s 1_p$$

Da $m-s$ Eigenwerte von $\underline{R}_h$ gleich Null sind, ergibt sich Q als:

$$Q = \sum_{p=r+1}^m 1_p$$

Da die Außerdiagonalelemente der Matrix $\underline{R} - \underline{I} + \underline{H}^2$ vorgegeben sind, ist Q nur noch von der Wahl der Kommunalitäten abhängig.

Zusammen mit den auf S.73 erwähnten Nebenbedingungen ergibt sich folgendes Minimierungsproblem:

$$\text{Zielfunktion:} \quad Q(\underline{H}^2) = \sum_{p=r+1}^m 1_p \longrightarrow \min! \quad (3.2a)$$

Nebenbedingungen (mit l_m kleinster Eigenwert von R_h):

$$1. \quad l_m \geq 0 \quad (3.2b)$$

$$2. \quad h_i^2 \leq 1 \text{ für alle } i, i=1(1)m \quad (3.2c)$$

(Wegen der ersten in Abschnitt 3.2.4.2.2. hergeleiteten unteren Schranke ist $h_i^2 \geq 0$ stets erfüllt, wenn (3.2b) erfüllt ist.)

Die Ungleichungsbedingung (3.2b) läßt sich in eine einfacher zu handhabende Gleichungsbedingung umwandeln. Es gilt nämlich der

Satz 3.3.:

Im Minimum der Zielfunktion (3.2a) unter den Nebenbedingungen (3.2b) und (3.2c) gilt: $l_m = 0$.

Beweis:

R_h habe den kleinsten Eigenwert $l_m > 0$ und (3.2c) sei erfüllt. Dann sind alle Eigenwerte der Matrix

$$R_h^* = R_h - l_m \cdot \underline{I}$$

um l_m vermindert, wie sich aus

$$\begin{aligned} |R_h^* - l^* \cdot \underline{I}| &= |R_h - l_m \cdot \underline{I} - l^* \cdot \underline{I}| = \\ &= |R_h - (l_m + l^*) \cdot \underline{I}| \end{aligned}$$

sofort ergibt. R_h^* liefert also einen kleineren Zielfunktionswert als R_h und verletzt (3.2b) und (3.2c) nicht.

Damit läßt sich das Problem als Lagrange-Ansatz behandeln:

Zielfunktion: $Q(\underline{H}^2) = \sum_{\rho=r+1}^m l_{\rho} - \lambda \cdot l_m \longrightarrow \min!$

Nebenbedingung: $h_i^2 - l_m \leq 1$

Ableiten der Zielfunktion ergibt wegen (2.13.):

$$\frac{\partial Q}{\partial h_i^2} = \sum_{\rho=r+1}^m q_{i\rho}^2 - \lambda \cdot q_{im}^2 \quad \text{für alle } i=1(1)m$$

Nullsetzen und Summation über alle i ergibt: $\lambda = m-r$

Damit ergibt sich die Ableitung der Zielfunktion:

$$\frac{\partial Q}{\partial h_i^2} = \sum_{\rho=r+1}^m q_{i\rho}^2 - (m-r)q_{im}^2 \quad (3.3.)$$

Das Minimierungsproblem kann nun endgültig folgendermaßen formuliert werden:

Zielfunktion:

$$Q(\underline{H}^2) = \sum_{\rho=r+1}^m l_{\rho} - (m-r) \cdot l_m \longrightarrow \min! \quad (3.4a)$$

Nebenbedingung:

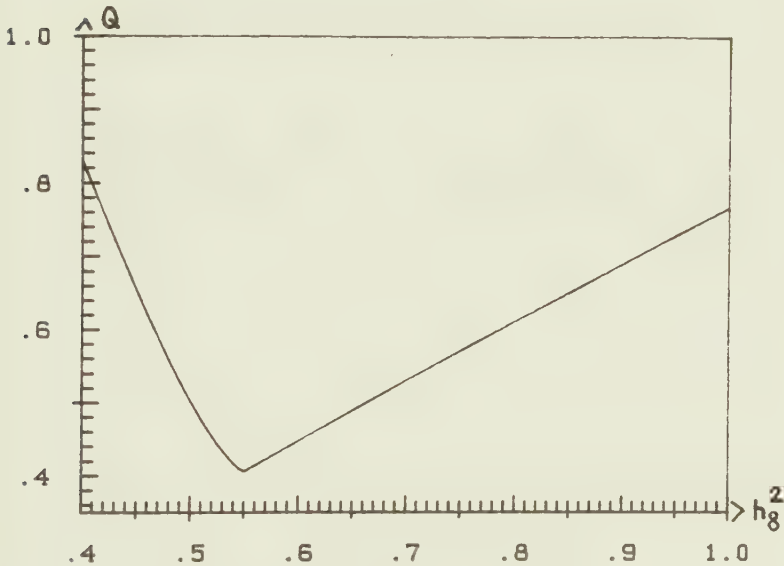
$$h_i^2 - l_m \leq 1 \quad \text{für alle } i=1(1)m \quad (3.4b)$$

Zwei wichtige Eigenschaften der Zielfunktion ergeben sich aus der Abbildung 4:

1. Die Zielfunktion ist nicht stets stetig differenzierbar.
2. Die Zielfunktion kann konkav (nach oben gewölbt) sein.

Abbildung 4

Schnitt durch die Zielfunktion (3.4a) bei Zugrundelegung von R_3 und festen Kommunalitäten h_1^2 bis h_7^2 und variabler Kommunalität h_8^2



Vor allem die erste Eigenschaft bereitet bei der numerischen Behandlung der Minvar-FA erhebliche Probleme. Sie ergibt sich auch aus einer Analyse der 2. Ableitungen.

Sei l_k der k -te der in nicht aufsteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerte von R_h ($k=1(1)m$) und seien alle Eigenwerte verschieden. Sei weiter q_k der zu l_k gehörige auf die Länge 1 normierte Eigenvektor.

Dann gilt (Jöreskog 1972):

$$\frac{\partial q_k}{\partial h_j^2} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{q_{jk} q_{ji}}{l_k - l_i} \cdot q_i$$

wodurch sich durch Anwendung der Kettenregel sofort die 2. Ableitungen von (3.4a) ergeben:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial h_j^2 \partial h_k^2} = \sum_{s=r+1}^m q_{js} q_{ks} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^m \frac{q_{ki}}{l_s - l_i} \cdot q_{ji} - (m-r) q_{jm} q_{km} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{q_{ki}}{l_m - l_i} q_{ji}$$

Wie sofort ersichtlich, können die 2. Ableitungen numerisch nicht bestimmt werden, wenn der Unterschied zwischen zwei Eigenwerten zu klein wird. In der praktischen Rechnung entsteht dieser Fall häufig mit $l_{m-1} \doteq l_m$.

3.3.3. Algorithmus zur Bestimmung der Minvar-Lösung

3.3.3.1. Untauglichkeit bestehender Verfahren

Die üblichen Methoden zur nichtlinearen Optimierung (vgl. z.B. Fletcher 1980 und Fletcher 1981) setzen stetig differenzierbare Zielfunktionen voraus. Für ein von Fletcher (1981, S.208, s. auch S.202f) beschriebenes Verfahren ist dies zwar nicht der Fall; hier wird jedoch die Matrix der 2. Ableitungen benötigt, die nicht immer bestimmt werden kann.

Das Verhalten zweier üblicher Verfahren, die keine 2. Ableitungen benötigen, soll beispielhaft an einer nicht stetig differenzierbaren Funktion mit sehr flachem Minimum gezeigt werden. Die Testfunktion lautet:

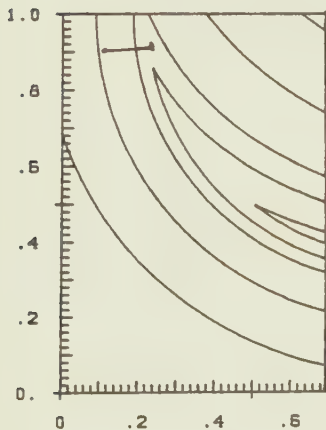
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \max \{f_1(x,y); f_2(x,y)\} \quad (3.6.) \\ \text{mit } f_1(x,y) &= xy^2 - 0,125 \\ \text{und } f_2(x,y) &= x^2 + y^2 - 1,8x - 2y + 1,4 \end{aligned}$$

Diese Funktion hat ein eindeutiges Minimum bei $x_{\min} = 0,738987$; $y_{\min} = 0,390348$ mit $f(x_{\min}, y_{\min}) = -0,012399$

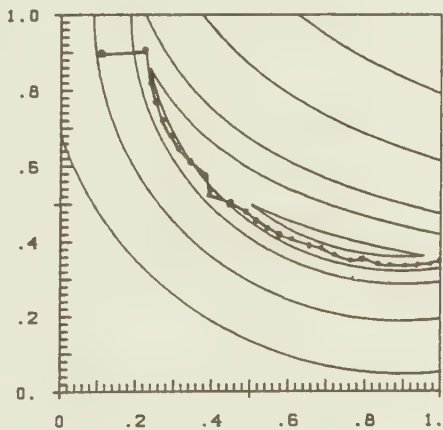
Abbildungung 5a zeigt das Verhalten der Methode des steilsten Abstiegs (vgl. Hoffmann und Hofmann 1971, S.92f), Abbildung 5b das Verhalten der Fletcher-Powell Methode (vgl. Hoffmann und Hofmann 1971, S.132ff). Beide Verfahren erweisen sich als ungeeignet.

Abbildungung 5

Abbildungung 5a
Methodedes steilsten
Abstiegs
Abbruch beim Punkt
 $x = 0,2202$
 $y = 0,9150$
nach 1 Iteration



Abbildungung 5b
Fletcher-Powell-
Methode
Abbruch beim Punkt
 $x = 1,0205$
 $y = 0,3634$
nach 54 Iterationen



3.3.3.2. Herleitung eines neuen Rechenverfahrens

Der verwendete Algorithmus ist das Ergebnis sehr vieler Minimierungsversuche; manches - und hier vor allem die Zahlenwerte verwendeter Parameter - ist daher nur durch rechnerische Erfahrung begründet.

Um die Grundgedanken zu verdeutlichen, betrachten wir vier aufeinanderfolgende Iterationen in Richtung des Gradienten mit konstanter Schrittweite s . Der Startpunkt sei x_0 , die Ergebnisse der folgenden Iterationen x_1 , x_2 , x_3 und x_4 .

Dabei können im wesentlichen folgende Situationen auftreten (s. Abb. 6):

1. Das Verfahren hat die Unstetigkeitsstelle noch nicht erreicht (in Abb. 6 die durchgezogene Linie). Diese Situation ist dadurch gekennzeichnet, daß

- a) $x_4 - x_3$ und $x_3 - x_2$ positives Skalarprodukt haben und
- b) $x_4 - x_2$ und $x_2 - x_0$ positives Skalarprodukt haben.

Wenn dieser Fall auftritt, geht die Suche weiter in Richtung des Gradienten mit gleicher Schrittweite.

2. Das Verfahren hat die Unstetigkeitsstelle erreicht, aber noch nicht den Bereich des Minimums (in Abb. 6: ----). In dieser Situation gilt:

- a) $x_4 - x_3$ und $x_3 - x_2$ haben negatives Skalarprodukt und
- b) $x_4 - x_2$ und $x_2 - x_0$ haben positives Skalarprodukt.

Hier schreitet die Minimierung zwar voran, aber nur sehr langsam. Zur Beschleunigung wird die Suche fortgesetzt mit dem Punkt

$$x_5 = x_4 + 2s \cdot (x_4 - x_2) / \|x_4 - x_2\|$$

3. Das Verfahren hat den Bereich des Minimums erreicht (in Abb. 6 ----). Dann gilt:

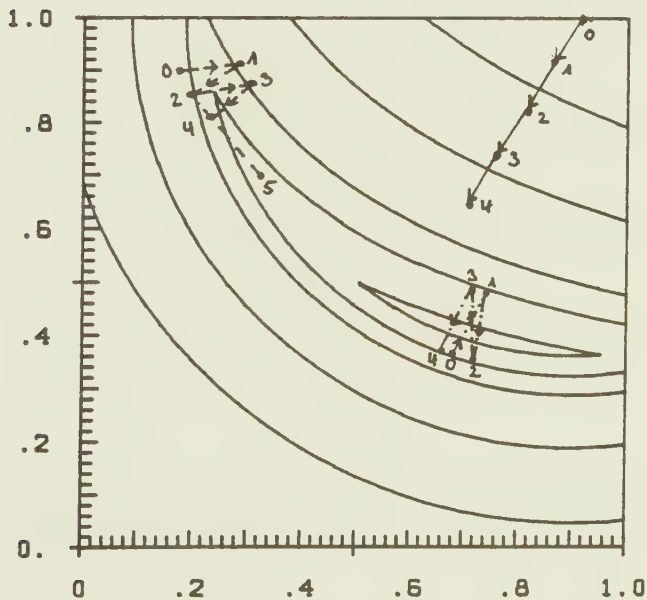
- a) $\underline{x}_4 - \underline{x}_3$ und $\underline{x}_3 - \underline{x}_2$ haben negatives Skalarprodukt und
- b) $\underline{x}_4 - \underline{x}_2$ und $\underline{x}_2 - \underline{x}_0$ haben negatives Skalarprodukt.

In diesem Fall wird die Schrittweite verkürzt.

Damit sind die Grundzüge des Unterprogramms "Verb" erklärt.

Abbildung 6

(Erklärung siehe Text)



Nach dieser Vorbereitung kann der vollständige Algorithmus beschrieben werden (das Fortran-Programm ist im Anhang abgedruckt).

Vom Hauptprogramm werden übernommen: Izeil = Anzahl der Variablen; Mf = Anzahl der Faktoren; Anfangs-

schätzungen für Kommunalitäten (beliebig zwischen 0 und 1).

1. Vorbereitung:

Setze $Schr=0,1$; $Schra=0,1$; Zähler für Anzahl der Iterationen $Iter=0$; Zähler für Anzahl der Iterationen seit der letzten Schrittweitenverkürzung $It1=0$; $Zmin=m$.

($Zmin$ dient zur Abspeicherung des bisher kleinsten Funktionswertes.)

2. Beginn des Verfahrens:

Setze $Iter=Iter+1$; $It1=It1+1$

a) Führe Unterprogramm "Grad" durch.

"Grad" liefert:

- Länge des Gradienten X_{norm}
- Vektor des auf die Länge 1 normierten Gradienten $\underline{g}$
- Vektor der der Größe nach in nicht aufsteigender Reihenfolge geordneten Eigenwerte $\underline{\lambda}$.

Führe Unterprogramm "Xkorrr" durch.

"Xkorrr" korrigiert Kommunalitäten, für die gilt: $h_1^2 - \lambda_m > 1$ (s. unten).

b) Abspeichern der letzten Ergebnisse:

Setze für alle $i=1(1)m$:

$h(i,4) = h(i,3)$; $h(i,3) = h(i,2)$;

$h(i,2) = h(i,1)$; $h(i,1) = h_1^2$

Bilde $h_1^2 = h_1^2 - Schr \cdot g_i$

Bestimme Zielfunktionswert "Ziel" nach (3.4a) mit Vektor $\underline{\lambda}$ (d.h. Zielfunktionswert gehört zu den Kommunalitäten, die jetzt in $h(i,1)$ abgespeichert sind).

- c) Wenn $Ziel \geq Zmin$ gehe nach 2d), sonst setze $Zmin = Ziel$ und $hmin(i) = h(i,1)$ für alle $i=1(1)m$.
- d) Führe 2a) bis 2c) zweimal durch. Wenn $Iter < 5$ gehe dann nach 2, sonst nach 3.

3. Hauptteil:

a) Bilde (Summation jeweils über i von 1 bis m):

$$\begin{aligned} - \text{Pruef1} &= \sum [h(i,1) - h(i,2)] \cdot [h_i^2 - h(i,1)] \\ - \text{Pruef2} &= \sum [h(i,2) - h(i,4)] \cdot [h_i^2 - h(i,2)] \\ - \text{Xnorm} &= [\sum (h_i^2 - h(i,2))^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Wenn $\text{Pruef1} > 0$ und $\text{Pruef2} < 0$ gehe nach 3c)

b) Setze $\text{Schr2} = 2 \cdot \text{Schr} / \text{Xnorm}$

$$\text{Setze } h_i^2 = h_i^2 + \text{Schr2} \cdot (h_i^2 - h(i,2))$$

Wenn $h_i^2 - l_m - 1 > 0$ setze $h_i^2 = 1 - l_m$

c) Wenn $\text{Pruef1} > 0$ oder $\text{Pruef2} > 0$ gehe nach 3e)

d) Setze $\text{Schr} = \text{Schr} \cdot 0,7$; $\text{It1} = 0$

e) Wenn $\text{It1} > 10$ gehe nach 3d)

Dieser Schritt gewährleistet, daß das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Iterationen abbricht.

Wenn $\text{Schr} < 0,1 \cdot 10^{-5}$ gehe nach 3f), sonst fahre fort mit Schritt 2.

f) Setze $\text{Schra} = \text{Schra} / 8$. Wenn $\text{Schra} < 0,0052$ gehe nach Schritt 4, sonst setze $\text{Schr} = \text{Schra}$ und fahre fort mit Schritt 2.

Dieser Schritt verlängert zwar die Rechenzeit erheblich, ist aber zur Verbesserung des Ergebnisses erforderlich.

4. Abschluß:

Setze $h_i^2 = \text{hmin}(i)$ für alle $i=1(1)m$ und Ziel = Zmin. Gehe zurück ins Hauptprogramm.

Es ist noch die Nebenbedingung (3.4b) zu berücksichtigen. Dies erfolgt im Unterprogramm "Xkorr", das auch im Anhang nachgelesen werden kann. Hier sollen nur die Grundgedanken dargestellt werden.

(3.4b) sei für die i-te und die j-te Kommunalität verletzt, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets angenommen sei: $h_i^2 \geq h_j^2$. Die Verallgemeinerung auf eine oder mehr als zwei Kommunalitäten ergibt sich analog.

Die Suche nach einer Lösung, die (3.4b) erfüllt, erfolgt wieder iterativ, wobei jede Iteration aus zwei Schritten besteht:

1. Die i -te und die j -te Kommunalität werden um $h_i^2 - l_m - 1$ bzw. um $h_j^2 - l_m - 1$ vermindert. Würden sich dadurch nicht die Eigenwerte verändern, wäre (3.4b) erfüllt.
2. Durch die Verminderung der Kommunalitäten wird i.a. wegen Satz 3.2. l_m vermindert, wodurch (3.4b) wieder verletzt ist. Dies wird ausgeglichen durch eine Erhöhung der anderen Kommunalitäten, die (mit Ausnahme der Richtungen h_i^2 und h_j^2) senkrecht zur Höhenlinie von l_m , also in Richtung des Gradienten erfolgt. Die Schrittweite berücksichtigt
 - a) in der ersten Iteration
 - den Betrag der Verminderung von h_i^2
 - die Steilheit des Anstiegs von l_m
 $(= 1 - q_{im}^2 - q_{jm}^2)$
 - b) in allen weiteren Iterationen zusätzlich den in der vorhergehenden Iteration erreichten Erfolg. Die Schrittweite wird hierzu mit dem Faktor
 $(\text{noch bestehende Verletzung von (3.4b)}) : (\text{Verminderung der Verletzung von (3.4b) in der letzten Iteration})$
 multipliziert.

Abbildung 7 zeigt den Weg des Verfahrens bei der Testfunktion (3.6.) bis zur ersten Schrittweitenverkürzung.

Nach 201 Iterationen erhält man folgendes Ergebnis der Minimumsuche:

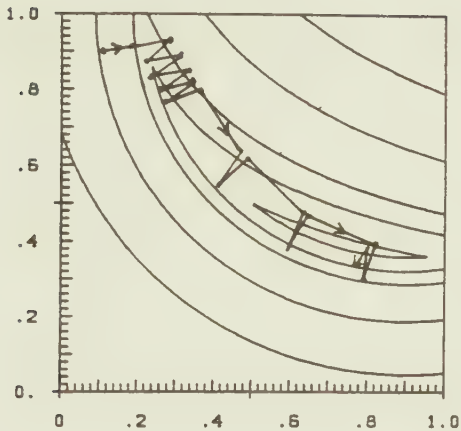
$$x^* = 0,738981; y^* = 0,390350$$

$$\text{mit } f(x^*, y^*) = -0,012399$$

Das Ergebnis stimmt bis auf die 5. Nachkommastelle mit dem tatsächlichen Minimum überein.

Abbildung 7

(Erklärung s. Text)



3.3.3.3. Überprüfung des Algorithmus an empirischen Korrelationsmatrizen

Da bei empirischen Korrelationsmatrizen das exakte Minimum von Q nicht bekannt ist, wurde das Verfahren mehrmals mit verschiedenen Startwerten für die Kommunalitäten auf die gleiche Korrelationsmatrix angewendet. Sehr ähnliche Resultate sind dann ein Indiz für die Güte des Rechenverfahrens; andererseits können weit auseinanderliegende Ergebnisse ein Hinweis auf multiple Minima sein.

Als Startwerte für die Kommunalitäten wurde jeweils gewählt (jeweils für alle i , $i=1(1)m$):

- Im 1. Lauf: $h_i^2 = 1$
- Im 2. Lauf: $h_i^2 = 1 - 1/r_{ii}$
- Im 3. Lauf: $h_i^2 = \max |r_{ik}|$, $k=1(1)m$, $k \neq i$

Sinnvoller Vergleichsmaßstab sind die Faktorladungen nach einer Varimax-Rotation, weil diese Grundlage einer Interpretation des Ergebnisses sind und die Varimax-Rotation die wohl am häufigsten verwendete Transformation ist (vgl. Arminger 1979, S.95).

Als erstes Beispiel wurde die Korrelationsmatrix R_3 und $r=2$ gewählt; die Ergebnisse zeigt Tabelle 9.

Tabelle 9:

Überprüfung des Algorithmus von Abschnitt 3.3.3.2. an R_3 : Varimax-rotierte Faktorladungen bei verschiedenen Ausgangsschätzungen für die Kommunalitäten.

1. Lauf	2. Lauf	3. Lauf
0,8847 0,2758	0,8848 0,2756	0,8848 0,2757
0,9422 0,1978	0,9420 0,1980	0,9422 0,1980
0,8884 0,1808	0,8888 0,1808	0,8887 0,1808
0,8748 0,2458	0,8745 0,2457	0,8744 0,2457
0,2336 0,9118	0,2337 0,9118	0,2335 0,9119
0,1849 0,7916	0,1849 0,7916	0,1849 0,7917
0,1239 0,7705	0,1238 0,7704	0,1239 0,7704
0,2568 0,6603	0,2568 0,6603	0,2569 0,6604
Q = 0,40526	Q = 0,40526	Q = 0,40526

Der erreichte Zielfunktionswert ist also bis auf die 5. Nachkommastelle gleich; die Faktorladungen unterscheiden sich höchstens in der 4. Nachkommastelle. Diese Unterschiede sind bedeutungslos.

Ein zweites Beispiel mit $m=10$ und $r=3$ (Revenstorf 1976, S.161), bei dem (3.4b) bezüglich zweier Kommunalitäten aktive Restriktion ist, lieferte nur

geringfügig schlechtere Ergebnisse: Die Zielfunktionswerte waren bis auf 2 Einheiten in der 4. Nachkommastelle gleich; die Faktorladungen unterschieden sich um maximal 7 Einheiten in der 4. Nachkommastelle. Auch diese Unterschiede sind praktisch bedeutungslos. Weitere Beispiele der gleichen Größenordnung führten zu ähnlichen, kleinere Beispiele zu durchweg besseren Ergebnissen.

Das Rechenverfahren liefert damit brauchbare Ergebnisse, allerdings ist der benötigte Rechenaufwand erheblich: Es wurden jeweils 260 bis 350 Iterationen benötigt. Wenn (3.4b) keine aktive Restriktion ist, so sind für jede Iteration zwei Eigenwertberechnungen durchzuführen, sonst werden pro Iteration ca. 10 Eigenwertberechnungen benötigt. Für große m ist die Minvar-Methode der Faktorenanalyse daher nur bedingt geeignet.

3.3.4. Über die Eindeutigkeit der Minvar-Lösung

Der zulässige Bereich der Minvar-Lösung ist zwar konvex (s. Abschnitt 3.2.4.2.), ein Eindeutigkeitsbeweis wie bei der CMTFA scheitert aber daran, daß die Zielfunktion konkav gekrümmt sein kann (vgl. Abschnitt 3.3.2.).

Ein Beispiel für multiple Minima liefert R_2 . Die Kommunalitäten 0,1873; 0,1030; 0,1372 und 0,5838 liefern das erste Minimum mit $Q = 0,36357$. Das 2. Minimum liefern die Kommunalitäten 0,0993; 0,1997; 0,4743 und 0,1496 mit $Q = 0,36752$.

KAPITEL 4: VERGLEICH DER VERFAHREN

4.1. Problemstellung und Konzeption des Vergleichs

In den Vergleich der Verfahren wurden mit einbezogen

- als die bekannten und für die Praxis wichtigen Methoden die Verfahren des 2. Kapitels (- die in Abschnitt 3.2. vorgestellten Verfahren scheinen in der Praxis keine Rolle zu spielen, sind auch nicht über die Software-Pakete SPSS, BMDP und SAS verfügbar; vgl. hierzu McCallum 1983 -) sowie
- als das in dieser Arbeit neu vorgestellte Verfahren die Minvar-Methode.

Der Vergleich soll vor allem Antworten zu folgenden Problemfeldern geben:

1. Welche Interpretationsmöglichkeiten eröffnen die Verfahren? Wie wirken sich Zielfunktion und Restriktionen der Methoden auf die Lösung aus? Dieser Problembereich soll durch numerische Beispiele behandelt werden.

2. Wie stabil sind die Lösungen der Methoden gegenüber Stichprobenfehlern und wie stark sind sie verzerrt, d.h. wie stark weichen sie von der Lösung ab, die man erhält, wenn man die Korrelationsmatrix der Grundgesamtheit zugrunde legt? Antworten hierauf soll eine Simulationsrechnung geben, die auch Aussagen über die Rechenzeit ermöglicht.

4.2. Vergleich durch Beispiele

Für das erste Beispiel wurde die Korrelationsmatrix R_3 gewählt. Diese bietet vor allem zwei Vorzüge:

1. Die Kommunalitäten streuen relativ stark (je nach Verfahren von ca. 0,5 bis ca. 0,9), so daß

der Einfluß der Gewichtung bei den Methoden des 2. Kapitels analysiert werden kann.

2. Die Matrix ist nicht so groß, daß der Einfluß der Kommunalitäten nicht mehr erkennbar ist, aber doch groß genug, daß das Beispiel praxisnah bleibt.

Die Ergebnisse der Rechnung sind in den Tabellen 10a) bis 10d) enthalten.

Tabelle 10:

Ergebnisse der Anwendung der Minres-FA (=1), der MLFA (=2), der Alpha-FA (=3) und der Minvar-FA (=4) auf R_3 bei Wahl von $r=2$.

Tabelle 10a)

Die Kommunalitäten

1	,8382	,8886	,8203	,8079	,8891	,6399	,5829	,4923
2	,8301	,8926	,8343	,8005	,9058	,6388	,5854	,4654
3	,8375	,8910	,8187	,8068	,8805	,6396	,5822	,4997
4	,9206	,9973	,8631	,8856	,9109	,7083	,6622	,5483

Tabelle 10b)

Varimax-rotierte Faktorladungen

1	2	3	4
,8725 ,2775	,8629 ,2924	,8736 ,2727	,8847 ,2758
,9202 ,2045	,9260 ,1875	,9200 ,2113	,9422 ,1978
,8873 ,1815	,8945 ,1848	,8866 ,1808	,8884 ,1808
,8640 ,2478	,8569 ,2573	,8639 ,2459	,8748 ,2458
,2332 ,9136	,2277 ,9243	,2344 ,9087	,2336 ,9118
,1884 ,7774	,1888 ,7767	,1892 ,7770	,1849 ,7916
,1291 ,7525	,1285 ,7543	,1297 ,7518	,1239 ,7705
,2582 ,6524	,2730 ,6249	,2553 ,6592	,2568 ,6603

Tabelle 10c)

Die Restmatrizen $R_h - AA'$

Methode 1:

,0000	-,0136	-,0195	,0364	,0160	,0179	-,0204	-,0243
-,0136	,0000	,0273	-,0198	-,0254	,0064	,0043	,0440
-,0195	,0273	,0000	-,0107	,0072	,0107	-,0141	-,0025
,0364	-,0198	-,0107	,0000	,0081	-,0265	,0290	-,0197
-,0160	-,0254	,0072	,0081	,0000	,0078	-,0124	-,0272
,0179	-,0064	,0107	-,0265	,0078	,0000	-,0263	,0212
-,0204	,0043	-,0141	,0290	,0124	-,0263	,0000	,0148
-,0243	,0440	-,0025	-,0197	-,0272	,0212	,0149	,0000

Methode 2:

,0000	-,0079	-,0209	,0444	,0062	,0080	-,0304	-,0363
-,0079	,0000	,0180	-,0157	-,0082	,0055	,0166	,0450
-,0209	,0180	,0000	-,0130	,0055	,0066	-,0173	-,0147
,0444	-,0157	-,0130	,0000	,0031	-,0326	,0229	-,0297
,0062	-,0082	,0055	,0031	-,0003	,0011	,0036	-,0108
,0080	,0055	,0066	-,0326	,0011	-,0001	-,0271	,0401
-,0304	,0166	-,0173	,0229	,0036	-,0271	,0000	,0326
-,0363	,0450	-,0147	-,0297	-,0108	,0401	,0326	,0004

Methode 3:

,0000	-,0153	-,0188	,0373	,0205	,0209	-,0173	-,0208
-,0153	,0000	,0272	-,0207	-,0316	-,0122	-,0012	,0409
-,0188	,0272	,0000	-,0093	,0080	,0108	-,0139	-,0005
,0373	-,0207	-,0093	,0000	,0101	-,0255	,0300	-,0177
,0205	-,0316	,0080	,0101	-,0001	,0116	-,0164	-,0298
,0209	-,0122	,0108	-,0255	,0116	,0000	-,0257	,0165
-,0173	-,0012	-,0139	,0300	,0164	-,0257	,0000	,0103
-,0208	,0409	-,0005	-,0177	-,0298	,0165	,0103	,0000

Methode 4:

,0618	-,0421	-,0308	,0172	,0148	,0162	-,0211	-,0273
-,0421	,0704	,0082	-,0469	-,0245	-,0047	,0078	,0425
-,0308	,0082	,0412	-,0206	,0076	,0117	-,0124	-,0025
,0172	-,0469	-,0206	,0598	,0075	-,0273	,0292	-,0219
,0148	-,0245	,0076	,0075	,0249	-,0030	-,0015	-,0330
,0162	-,0047	,0117	-,0273	-,0030	,0475	-,0498	,0069
-,0211	,0078	-,0124	,0292	-,0015	-,0498	,0531	-,0016
-,0273	,0425	-,0025	-,0219	-,0330	,0069	-,0016	,0465

Tabelle 10d:

Zielfunktionswerte

1	2	3	4
0,02411	0,50386	0,04708	0,40526

Aus den Tabellen 10a) bis 10d) ist zu entnehmen:

1. Die Minvar-Methode ergibt durchweg höhere Kommunalitäten. Dies erklärt sich aus Satz 3.1.: Da die Minvar-Methode als einzige keine negativen Eigenwerte liefert, müssen die Diagonalelemente entsprechend höher sein.

2. Die Interpretation der (rotierten) Faktormuster wäre bei allen vier Lösungen gleich. Anzumerken ist nur, daß die Minvar-Lösung geringfügig mehr Varianz durch die extrahierten Faktoren erklärt. $\sum a_{ij}^2$ ist nämlich bei 1: 5,959; bei 2: 5,953; bei 3: 5,956 und bei 4: 6,091. Auch dies ist aus Satz 3.1. erklärlich: Da die Kommunalitäten höher sind, sind auch die beiden ersten Eigenwerte größer.

3. Die Restmatrizen der Methoden 1 bis 3 wurden in vier Teile aufgeteilt; der Teil oben links gehört

zu den hohen, der Teil unten rechts zu den niedrigen Kommunalitäten. Wegen der unterschiedlichen Gewichtung der Abweichungen durch die Verfahren ist zu erwarten, daß

- die MLFA besonders gute Anpassung bei Variablen mit hohen Kommunalitäten,
- die Alpha-FA besonders gute Anpassung bei Variablen mit niedrigen Kommunalitäten und
- die Minres-FA bei beiden einen Mittelwert liefern.

Dies wird durch die Ergebnisse bestätigt:

Für die MLFA ist die Summe der Beträge der Abweichungen im Teil oben links 0,2858 und im Teil unten rechts 0,1996. Die entsprechenden Werte für die Alpha-FA bzw. für die Minres-FA lauten 0,3976 und 0,1050 bzw. 0,3680 und 0,1246.

3. Die Diagonalglieder der Restmatrizen der Methoden 1 bis 3 sind erwartungsgemäß (fast) Null und daher nicht weiter interpretierbar.

Hingegen haben die Diagonalglieder der Restmatrix bei der Minvar-Methode eine anschauliche und für die Interpretation des Ergebnisses wichtige Bedeutung.

So bedeutet $h_1^2 - a_{11}^2 - a_{21}^2 = 0,0618$, daß 6,18% der Varianz der ersten Variablen nur durch gemeinsame Faktoren erklärt werden kann, die wegen ihrer geringen Bedeutung nicht extrahiert wurden. Dies liefert ggf. Hinweise, auf welche Variablen eine schlechte Modellanpassung zurückzuführen ist.

4. Die Zielfunktionswerte der Methoden 1 bis 3 haben keine anschauliche Bedeutung. Dagegen bedeutet der Zielfunktionswert der Minvar-Methode, daß alle nicht extrahierten gemeinsamen Faktoren nur die Varianz 0,40526 erklären. Die Methode liefert also

ein sinnvolles Maß für die Güte der Anpassung und damit eine Entscheidungshilfe für die Frage nach der Anzahl der Faktoren.

Einen weiteren Unterschied zwischen den Methoden 1 bis 3 und der Methode 4 liefert das folgende Beispiel von 5 sozio-ökonomischen Variablen (Anderson, 1981).

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0,00975 & 0,97245 & 0,43887 & 0,02241 \\ 0,00975 & 1 & 0,15428 & 0,69141 & 0,86307 \\ 0,97245 & 0,15428 & 1 & 0,51472 & 0,12193 \\ 0,43887 & 0,69141 & 0,51472 & 1 & 0,77765 \\ 0,02241 & 0,86307 & 0,12193 & 0,77765 & 1 \end{bmatrix}$$

Bei allen Methoden wurden zwei Faktoren extrahiert. Startwerte für die Kommunalitätenschätzungen waren jeweils die multiplen Korrelationskoeffizienten.

Tabelle 11:

Kommunalitätenschätzungen der vier Methoden und untere Schranken für die Kommunalitäten

$1-1/r^{ii}$	1	2	3	4
0,9686	1,0000	0,9879	1,0000	1,0000
0,8223	0,7653	0,8021	0,7652	0,8314
0,9692	0,9556	0,9702	0,9537	1,0000
0,7857	0,7972	0,8134	0,7963	0,7951
0,8470	0,9748	0,9319	0,9754	0,9824

Da (3.4b) stets verletzt ist, wenn eine Kommunalität kleiner als die untere Schranke wird (s. Abschnitt 3.2.4.2.), gilt für die Minvar-Lösung stets: $h_i^2 \geq 1-1/r^{ii}$ für alle $i=1(1)m$. Das Beispiel zeigt, daß diese untere Schranke bei den Methoden 1 bis 3 durchaus verletzt sein kann.

4.3. Vergleich durch Simulation

4.3.1. Konzeption des Vergleichs

Simulationsstudien in der Faktorenanalyse gehen üblicherweise (z.B. Browne 1968, Revenstorf 1976, S.269ff) davon aus, daß das Modell mit r Faktoren in der Grundgesamtheit exakt erfüllt ist. Dies scheint jedoch i.a. nicht der Realität zu entsprechen (s. auch Abschnitt 1.3.2. dieser Arbeit), weshalb hier ein anderer Weg beschritten wird:

Es wird davon ausgegangen, daß die Korrelationen der Grundgesamtheit in guter Näherung, aber nicht exakt durch r Faktoren reproduziert werden können. Die vorgegebenen Korrelationsmatrizen der Grundgesamtheiten wurden so ausgewählt, daß diese Bedingung erfüllt ist.

Da weiter in der Praxis die rotierten Faktorladungen interpretiert werden und die Varimax-Rotation die am häufigsten gebrauchte Rotation ist, wird die Stabilität der Lösungen nach einer Varimax-Rotation der Faktoren untersucht. Eine solche Untersuchung existiert m.W. in der Literatur nicht.

4.3.2. Vorgehensweise

Die Korrelationsmatrix einer Stichprobe vom Umfang n aus einer multivariat normalverteilten Grundgesamtheit mit vorgegebener Korrelationsmatrix R_g kann nach Browne (1968) folgendermaßen bestimmt werden:

1. Erzeuge eine $m \times m$ -Matrix $\underline{T}$ mit

$$t_{ij} = 0 \text{ für } i < j$$

t_{ij} ist (0;1)-normalverteilt für $i > j$

t_{ij} ist χ^2 -verteilt mit $(n-i)$ Freiheitsgraden für
 $i = j$

2. Bilde $\underline{K}$ so, daß $\underline{R}_g = \underline{K}\underline{K}'$.

$\underline{K}$ wird als Matrix der Hauptkomponenten von $\underline{R}_g$ bestimmt.

3. Bilde $\underline{C} = (\underline{K}\underline{T}) \cdot (\underline{K}\underline{T})' = \underline{K}\underline{T}\underline{T}'\underline{K}$

4. Dann ergibt sich die Korrelationsmatrix der Stichprobe $\underline{R}$ aus:

$$\underline{R} = (\text{diag } \underline{C})^{-1/2} \underline{C} (\text{diag } \underline{C})^{-1/2}$$

Für Schritt 1 wurde ein nach der gemischten Konkruenzmethode (vgl. z.B. Björck, Dahlquist 1972, S.332) erstellter Zufallszahlengenerator verwendet. Die so erzeugten gleichverteilten Zufallszahlen wurden an einer numerischen Näherung der Verteilungsfunktion der (0;1)-Normalverteilung gespiegelt.

Bei den gewählten Beispielen liegen die Freiheitsgrade der benötigten χ^2 -verteilten Zufallszahlen über 190; diese konnten daher durch normalverteilte Zufallszahlen ersetzt werden.

Der Zufallszahlengenerator wurde auf Anpassung an die vorgegebene Normalverteilung und auf Autokorrelation bis zur 90. Ordnung bei verschiedenen Startwerten untersucht. In keinem Fall war der Betrag der Autokorrelation größer als 0,1 und/oder führte der χ^2 -Anpassungstest bei einem Signifikanzniveau von über 48% zur Ablehnung.

Da die Faktorladungen eines jeden Faktors mit -1 multipliziert werden können und die Anordnung der

Faktoren nach einer Rotation grundsätzlich beliebig ist, sind die Faktormuster bis zu einem gewissen Grade auch nach einer Rotation willkürlich. Dies wird beseitigt, indem die Faktoren nach fallender Quadratsumme der Faktorladungen geordnet werden und die Vorzeichen so bestimmt werden, daß jeweils die erste Faktorladung eines jeden Faktors positiv ist.

4.3.3. Ergebnisse

Zur Darstellung der Ergebnisse wird folgende Bezeichnungsweise zusätzlich verwendet:

$\bar{A}$ = Matrix der Mittelwerte der Faktorladungen

A_g = Matrix der Faktorladungen bei Zugrundelegung der Korrelationsmatrix der Grundgesamtheit

$\underline{S}$ = Matrix der Stichprobenstreuungen der Faktorladungen.

$\bar{S}$ = Mittelwert der Elemente von $\underline{S}$.

RZ = Rechenzeitindikator. Da die tatsächliche Rechenzeit nicht nur von der verwendeten Maschine, sondern auch von der jeweiligen Auslastung abhängig ist, wurde die durchschnittliche Anzahl der pro Iteration benötigten Eigenwertberechnungen als Indikator verwendet.

$$A_b = \bar{A} - A_g$$

Das erste Beispiel ist dem Buch von Pawlik (1976, S.107) entnommen:

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0,402 & 0,394 & 0,301 & 0,305 & 0,339 & 0,340 \\ 0,402 & 1 & 0,618 & 0,150 & 0,135 & 0,206 & 0,183 \\ 0,394 & 0,618 & 1 & 0,321 & 0,289 & 0,353 & 0,345 \\ 0,301 & 0,150 & 0,321 & 1 & 0,846 & 0,759 & 0,661 \\ 0,305 & 0,135 & 0,289 & 0,846 & 1 & 0,797 & 0,800 \\ 0,339 & 0,206 & 0,363 & 0,759 & 0,797 & 1 & 0,736 \\ 0,340 & 0,183 & 0,345 & 0,661 & 0,800 & 0,736 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabelle 13 zeigt die Faktormuster A_g bei Anwendung der vier Methoden.

Tabelle 13

Faktormuster bei Zugrundelegung von R_5

Methode 1	Methode 2 ,	Methode 3	Methode 4
,2709 ,4689	,2620 ,4763	,2727 ,4673	,2677 ,4652
,0128 ,8445	,0287 ,8022	,0089 ,8541	-,001 ,8791
,2212 ,7262	,2082 ,7594	,2238 ,7180	,2190 ,7181
,8416 ,1687	,8559 ,1667	,8355 ,1688	,8785 ,1652
,9536 ,1249	,9574 ,1254	,9542 ,1194	,9422 ,1344
,8365 ,2347	,8131 ,2415	,8415 ,2335	,8218 ,2410
,7937 ,2235	,7989 ,2211	,7935 ,2306	,8242 ,2280

Mit R_5 als Korrelationsmatrix der Grundgesamtheit wurden insgesamt 1200 Simulationen durchgeführt, und zwar für alle vier Methoden

- je 100 bei einem Stichprobenumfang von $n=200$ und dem Startwert für den Zufallszahlengenerator 3141.
- je 100 bei einem Stichprobenumfang von $n=200$ und dem Startwert 7612, wodurch die Stabilität des Ergebnisses bezüglich des Startwerts untersucht werden sollte.
- je 100 bei einem Stichprobenumfang von $n=300$ und dem Startwert 3141. Ziel war eine Aussage über den Einfluß des Stichprobenumfangs auf die Streuung der Faktorladungen.

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 14 bis 16 zusammengefaßt.

Tabelle 14

Matrizen $\underline{S}$ und Mittelwerte $\bar{s}$ der Simulationen bei Zugrundelegung von $\underline{R}_5$

Tabelle 14a: n=200, Startwert=3141

Methode 1	Methode 2	Methode 3	Methode 4
,0553 ,0999	,0532 ,0970	,0556 ,1017	,0564 ,1019
,0487 ,0677	,0510 ,0678	,0489 ,0693	,0471 ,0709
,0609 ,0501	,0553 ,0347	,0621 ,0578	,0643 ,0609
,0266 ,0496	,0231 ,0521	,0301 ,0494	,0171 ,0470
,0163 ,0528	,0172 ,0550	,0178 ,0526	,0150 ,0517
,0391 ,0416	,0446 ,0475	,0381 ,0406	,0377 ,0415
,0391 ,0416	,0332 ,0451	,0408 ,0402	,0319 ,0392

Tabelle 14b: n=200, Startwert=7612

Methode 1	Methode 2	Methode 3	Methode 4
,0597 ,0991	,0572 ,0955	,0604 ,1009	,0615 ,1005
,0513 ,0671	,0536 ,0666	,0514 ,0685	,0485 ,0674
,0643 ,0463	,0574 ,0328	,0664 ,0544	,0693 ,0564
,0238 ,0496	,0203 ,0528	,0273 ,0494	,0155 ,0467
,0164 ,0532	,0180 ,0557	,0171 ,0529	,0157 ,0516
,0362 ,0419	,0415 ,0486	,0356 ,0404	,0343 ,0408
,0345 ,0424	,0301 ,0470	,0361 ,0400	,0268 ,0388

Tabelle 14c: n=300, Startwert=3141

Methode 1	Methode 2	Methode 3	Methode 4
,0452 ,0811	,0436 ,0787	,0455 ,0825	,0461 ,0831
,0394 ,0536	,0414 ,0546	,0394 ,0554	,0379 ,0595
,0495 ,0399	,0452 ,0281	,0505 ,0460	,0526 ,0499
,0216 ,0403	,0187 ,0423	,0243 ,0402	,0139 ,0383
,0133 ,0430	,0143 ,0446	,0144 ,0428	,0121 ,0421
,0316 ,0337	,0363 ,0384	,0309 ,0329	,0306 ,0335
,0310 ,0336	,0270 ,0365	,0329 ,0327	,0257 ,0314

Tabelle 14d: Mittelwerte $\bar{s}$

n	Startwert	Meth. 1	Meth. 2	Meth. 3	Meth. 4
200	3141	.0492	.0483	.0504	.0488
200	7612	.0490	.0484	.0501	.0481
300	3141	.0398	.0393	.0407	.0398

Tabelle 15

Matrizen $A_b \cdot 10000$ bei verschiedenen Startwerten und $n=200$

Tabelle 15a: Startwert=3141

Methode 1		Methode 2		Methode 3		Methode 4	
74	53	66	53	79	44	87	33
103	-59	110	-140	99	-19	108	12
94	-99	61	-36	106	-125	121	-127
-20	20	-19	37	-30	16	-28	-5
-24	24	-34	38	-30	18	-14	2
-30	15	-39	44	-17	8	-13	-13
-14	7	-14	39	-5	-3	-9	-21

Tabelle 15b: Startwert=7612

Methode 1		Methode 2		Methode 3		Methode 4	
6	-24	-4	-18	11	-31	22	-37
9	156	7	89	7	190	28	203
30	-10	6	45	41	-36	61	-37
-27	-54	-22	-38	-38	-60	-32	-79
-33	-47	-50	-28	-33	-63	-13	-84
25	-57	22	-45	37	-60	40	-92
-26	-67	-19	-47	-19	-70	-22	-92

Tabelle 16

Rechenzeitindikatoren RZ bei den Simulationen

n	Startwert	Meth. 1	Meth. 2	Meth. 3	Meth. 4
200	3141	50,03	62,57	28,71	543,00
200	7612	50,26	71,57	28,87	512,10
300	3141	45,94	56,66	28,24	551,28
Durchschnitt		48,74	63,60	28,61	538,46

Demnach läßt sich folgendes feststellen:

1. Die Standardabweichungen der Faktorladungen erwiesen sich als relativ unabhängig vom Startwert des Zufallszahlengenerators.
2. Die Elemente der Matrix $\underline{S}$ nahmen mit steigendem n fast exakt um den Faktor $n^{-1/2}$ ab.
3. Die Faktorladungen streuten bei allen Verfahren etwa gleich stark.
4. Die Elemente der Matrix $\underline{A}_b$ sind stark vom Startwert des Zufallszahlengenerators beeinflusst und werden daher nicht weiter untersucht.
5. Hohe Faktorladungen haben bei allen Methoden durchweg niedrige Streuung und umgekehrt.
6. Die Minvar-Methode benötigt die ca. 10- bis 20-fache Rechenzeit der anderen Methoden.

Für jede Methode wurden 100 weitere Simulationen mit $\underline{R}_3$ als $\underline{R}_g$, Startwert=3141 und $n=302$ durchgeführt. Dabei ergaben sich keine abweichenden Ergebnisse.

4.4. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Der Vergleich der vier Verfahren ergab:

1. Bezüglich der Stabilität der Schätzung sind nur unwesentliche Unterschiede erkennbar.
2. Bezüglich der Rechenzeit schneidet die Minvar-Methode deutlich am schlechtesten ab. Es folgen die Maximum-Likelihood-Methode, die IHFM und die Alpha-Methode als das Verfahren, das am wenigsten Rechenzeit benötigt.
3. Die Diagonalelemente der Matrix $R_h - AA'$ und der Zielfunktionswert haben nur bei der Minvar-Methode eine anschauliche Bedeutung. Dieses Verfahren erlaubt daher eine bessere Interpretation des Ergebnisses.
4. Schließlich entspricht nur die Minvar-Lösung dem Modell der FA. Als Folge ergibt sich, daß nur die Kommunalitäten der Minvar-Lösung mit Sicherheit die unteren Schranken von Guttman erfüllen.

Die Minvar-Lösung der Faktorenanalyse kann daher aus theoretischen und aus praktischen Gründen empfohlen werden. Ihre Anwendung wird eine Frage der zur Verfügung stehenden Rechenzeit sein. Dies ist jedoch ein Problem, das durch die rasche Entwicklung immer leistungsfähigerer Rechner stetig an Bedeutung verliert.

LITERATURVERZEICHNIS

Anderson, M.S.

Minimax Eccentricity Estimation in Factor Analysis

Diss. 1981, Athens, Georgia, USA

Anderson, T.W.

An Introduction to Multivariate Statistical Analysis

New York 1958

Arminger, G.

Faktorenanalyse

Stuttgart 1979

Bartlett, M.S.

Tests of significance in factor analysis

in: British Journal of Psychology, Stat. Sect.,
3, 1950, S. 77-85

Bartlett, M.S.

A further note on tests of significance in factor analysis

in: British Journal of Psychology, Stat. Sect.,
4, 1951, S. 1-2

Bentler, P.M.

A lower-bound method for the dimension-free measurement of internal consistency

in: Social Science Research 1, 1972, S. 343-357

Bentler, P.M., Woodward, J.A.

Inequalities among lower bounds to reliability: with applications to test construction and factor analysis

in: Psychometrika 45, 1980, S. 249-267

- Berge ten, J.M., Snijders, T.A.B., Zegers, F.E.
Computational aspects of the greatest lower
bound to the reliability and constrained minimum
trace factor analysis
in: Psychometrika 46, 1981, S. 201-213
- Björck, A., Dahlquist, G.
Numerische Methoden
München 1972
- Bronstein I.N., Semendjajew, K.A.
Taschenbuch der Mathematik
Frankfurt/M., 1980
- Browne, M.W.
A comparison of factor analytic techniques
in: Psychometrika 33, 1968, S. 267-334
- Browne, M.W.
Fitting the factor analysis model
in: Psychometrika 34, 1969, S. 375-394
- Cattell, R.B.
Extracting the correct number of factors in factor analysis
in: Educational and Psychological Measurement
18, 1958, S. 691-738
- Cattlell, R.B.
The scree-test for the number of factors
in: Multivariate Behavioral Research 1, 1966,
S. 245-276
- Cronbach, L.J., Rajaratnam, N., Gleser G.C.
Theory of Generalizability: A liberization of
reliability theory
in: The British Journal of Statistical Psychology,
Part 2, 16, 1963, S. 137-163

Della Riccia, G., Shapiro, A.

Minimum rank and minimum trace of covariance
matrices

in: Psychometrika 47, 1982, S. 443-448

Derflinger, G.

A general computing algorithm for factor analysis

in: Biometrical Journal 21, 1979, S. 25-38

Dwyer, P.S.

The contribution of an orthogonale multiple
factor solution to multiple correlation

in: Psychometrika 4, 1939, S. 163-171

Fletcher, R.

Practical Methods of Optimization: Unconstrained
Optimization

New York 1980

Fletcher, R.

Practical Methods of Optimization: Constrained
Optimization

New York 1981

Franklin, J.N.

Matrix-Theory

Englewood Cliffs 1968

Gorsuch, R.L.

Factor Analysis

Philadelphia 1974

Guttman, L.

Some necessary conditions for common factor
analysis

in: Psychometrika 19, 1954, S. 149-161

Guttman, L.

"Best possible" systematic estimates of communalities

in: Psychometrika 21, 1956, S. 273-285

Hadley, G.

Nonlinear and Dynamic Programming

London 1964

Harman, H.H.

Modern Factor Analysis

Chicago 1967

Harman, H.H., Fukuda, Y.

Resolution of the Heywood case in the minres solution

in: Psychometrika 31, 1966, S. 563-571

Harman, H.H., Jones, W.H.

Factor analysis by minimizing residuals (minres)

in: Psychometrika 31, 1966, S. 351-368

Harris, C.W.

Some Rao-Guttman relationships

in: Psychometrika 27, 1962, S. 247-263

Heise, D.R.

Some methodological issues in semantic differential research

in: Psychological Bulletin 72, 1969, S. 406-422

Hemmerle W.J.

Obtaining maximum-likelihood estimates of factor loadings and communalities using an easily implemented iterative computer procedure

in: Psychometrika 30, 1965, S. 291-302

Hoffmann, U., Hofmann, H.

Einführung in die Optimierung
Weinheim/Bergstraße 1971

Horn, J.L.

A rationale and a test for the number of factors
in factor analysis

in: Psychometrika 30, 1965, S. 179-185

Horn, J.L., Engström, R.

Cattell's scree-test in relation to Bartlett's
chi-square test and other observations on the
number of factors problem

in: Multivariate Behavioral Research 14, 1979,
S. 283-300

Horst, R.

Nichtlineare Optimierung
München 1979

Hotelling, H.

Analysis of a complex of statistical variables
into principal components

in: Journal of Educational Psychology 24, 1933,
S. 417-441 und S. 498-520

Hotelling, H.

Relations between two sets of variates

in: Biometrika 28, 1936, S. 322-377

Jackson, P.H., Agunwamba, C.C.

Lower bounds for the reliability of the total
score on a test composed of non-homogeneous
items

I: Algebraic lower bounds

in: Psychometrika 42, 1977, S. 567-591

Jöreskog, K.G.

On the statistical treatment of residuals in
factor analysis

in: Psychometrika 27, 1962, S. 335-353

Jöreskog, K.G.

Some contributions to maximum likelihood factor
analysis

in: Psychometrika 32, 1967, S. 443-482

Jöreskog, K.G.

Factor analysis by generalized least squares

in: Psychometrika 37, 1972, S. 243-260

Jöreskog, K.G.

Structural analysis of covariance and correlation
matrices

in: Psychometrika 43, 1978, S. 443-477

Joos, Richter

Höhere Mathematik für den Praktiker

Frankfurt/M 1979

Kaiser, H.F.

A note on the Kaiser-Tyron solution for the
communalities

in: Psychometrika 24, 1959, S. 269-271

Kaiser, H.F., Dickman, K.

Sample and population score matrices and sample
correlation matrices from an arbitrary population
correlation matrix

in: Psychometrika 27, 1962, S. 179-181

Kaiser, H.F., Caffrey, J.

Alpha factor analysis

in: Psychometrika 30, 1965, S. 1-14

Kendall, M.G., Stuart, A.

The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2
London 1961

Keller, J.B.

Factorization of matrices by least squares
in: Biometrika 49, 1962, S. 239-242

Künzi, H.P., Krelle, W.

Nichtlineare Programmierung
Berlin 1962

Lawley, D.N.

The estimation of the factor loadings by the
method of maximum likelihood
in: Proceedings of the Royal Society of
Edinburgh, Ser. A, 60, 1940, S. 64-82

Lawley, D.N., Maxwell A.E.

Factor Analysis as a Statistical Method
London 1971

Ledermann, W.

On the rank of the reduced correlation matrix in
multiple factor analysis
in: Psychometrika 2, 1937, S. 85-93

Ledermann, W.

On a problem concerning matrices with variable
diagonal elements
in: Proceedings of the Royal Society of
Edinburgh 60, 1939, S. 1-17

Linn, R.L.

A monte carlo approach to the number of factors
problem
in: Psychometrika 33, 1968, S. 37-71

Malinvaud, E.

Statistical Methods for Econometrics

New York 1970

McCallum, R.

A comparison of factor analysis programs in
SPSS, PMDP and SAS

in: Psychometrika 48, 1983, S. 223-231

McDonald, R.P.

A modified treatment of the weighting problem

in: Psychometrika 33, 1968, S. 351-381

McDonald, R.P.

A generalized common factor analysis based on
residual covariance matrices of prescribed
structure

in: The British Journal of Mathematical and
Statistical Psychology 22, 1969, S. 149-163

McDonald, R.P.

The theoretical foundations of principal factor
analysis, canonical factor analysis and alpha
factor analysis

in: The British Journal of Mathematical and Sta-
tistical Psychology 23, 1970, S. 1-21

Osgood, C.E.

On the whys and wherefores of E, P and A

in: Journal of Personality and Social Psychology
12, 1969, S. 194-199

Pawlik, K.

Dimensionen des Verhaltens

Bern 1976

Rao, C.R.

Estimation and test of significance in factor analysis

in: Psychometrika 20, 1955, S. 93-111

Revenstorf, D.

Lehrbuch der Faktorenanalyse

Stuttgart 1976

Roff, M.

Some properties of the communality in multiple factor theory

in: Psychometrika 1, 1936, S. 1-6

Schmeißer, G., Schirmeier, H.

Praktische Mathematik

New York 1976

Shapiro, A.

Rank-reducibility of a symmetric matrix and sampling theory of minimum trace factor analysis

in: Psychometrika 47, 1982, S. 187-199

Spearman, C.

General intelligence, objectively determined and measured

in: American Journal of Psychology 15, 1904, S. 201-293

Steiger, J.H.

The relationship between external variables and common factors

in: Psychometrika 44, 1979, S. 93-97

Thomson, G.H.

Hotelling's method modified to give Spearman's g

in: Journal of Educational Psychology 25, 1934, S. 366-374

Thurstone, L.L.

Multiple factor analysis

in: Psychological Review 38, 1931, S. 406-427

Thurstone, L.L.

Multiple Factor Analysis

Chicago 1947

Tuk, F.T.

The communality problem for stieltjes matrices

in: Linear Algebra and its Applications 38,

1981, S. 161-169

Überla, K.

Faktorenanalyse

Berlin 1971

Weber, E.

Faktorenanalyse

Jena 1974

Wilkinson, J.H.

The Algebraic Eigenvalue Problem

Oxford, 1965

Wrigley, C.

The effect upon communalities of changing the
estimate of the number of factors

in: The British Journal of Statistical Psychology 12, 1959, S. 35-54

Zurmühl, R.

Matrizen

Berlin 1964

ANHANG

DAS PROGRAMM "MIV" ZUR BESTIMMUNG DER MINVAR-LÖSUNG

Anmerkungen:

1. Das Programm ist für eine Kontron-Kleinrechenmaschine geschrieben. Zur Implementierung auf anderen Anlagen sind ggf. Anpassungen erforderlich.
2. Die Unterprogramme "Input" und "Inwert" wurden von Herrn Dr. D. Drefahl erstellt.

```

1:      PROGRAM MIV
2:  C
3:  C   FAKTORENANALYSE NACH DER MINVARMETHODE
4:  C   AUTOR: RAIMUND WILDNER
5:  C   VERSION: 23. 2. 1984
6:  C   STETS GLEICHBLEIBENDE PARAMETER SIND:
7:  C   - IZEIL = ANZAHL DER VARIABLEN
8:  C   - MF    = ANZAHL DER ZU EXTRAHIERENDEN FAKTOREN
9:  C   - E     = VEKTOR DER EIGENWERTE
10: C   - A     = MATRIX DER EIGENVEKTOREN
11: C
12:      DIMENSION Y(20,21),RH(20,20),A(20,20),E(20),G(20),RHR(20,20)
13:      INTEGER ENT(2)
14:      COMMON Y,RH,RHR,A
15:      DATA ENT/'J','N'/
16:      CALL REING(IZEIL,MF)
17:      WRITE(3,64)
18:      READ(3,66)IW
19:      IF(IW.EQ.ENT(2))GOTO 4
20:      CALL DETER(IZEIL,DET)
21:      IF(DET.LT..1E-4)WRITE(3,68)
22:      IF(DET.LT..1E-4)GOTO 4
23:      CALL SINV(IZEIL)
24:      DO 2 I=1,IZEIL
25:          E(I)=1.-1./RHR(I,I)
26: 2  CONTINUE
27:      GOTO 8
28: 4  WRITE(3,70)
29:      CALL INWERT(3,E,0,IZEIL,1)
30: 8  PAUSE
31:      WRITE(3,90)
32:      WRITE(3,80)
33:      WRITE(3,100)
34:      CALL AUSG(IZEIL,IZEIL,RH)
35:      WRITE(3,102)
36:      WRITE(3,104) (E(I),I=1,IZEIL)
37:      DO 10 I=1,IZEIL
38:          RH(I,I)=E(I)
39: 10 CONTINUE
40:      CALL EIGEN(IZEIL,E)
41:      MF1=MF+1
42:      ZIEL=0.
43:      DO 40 I=MF1,IZEIL
44:          ZIEL=ZIEL+E(I)-E(IZEIL)
45: 40 CONTINUE
46:      WRITE(3,110)
47:      WRITE(3,104) (E(I),I=1,IZEIL)
48:      WRITE(3,170)ZIEL
49:      PAUSE
50:      CALL VERB(IZEIL,MF,E,ZIEL,ITER)
51:      PAUSE
52:      WRITE(3,130)ITER
53:      WRITE(3,140)
54:      WRITE(3,104) (RH(I,I),I=1,IZEIL)
55:      WRITE(3,110)
56:      WRITE(3,104) (E(I),I=1,IZEIL)
57:      WRITE(3,170)ZIEL
58:      WRITE(3,150)
59:      CALL AUSG(IZEIL,MF,A)
60:      IF(MF.LT.2)GOTO 60

```

```

61:      WRITE(3,152)
62:      CALL ROTAT(IZEIL,MF,V)
63:      CALL AUSG(IZEIL,MF,A)
64: 60    CALL AAGEN(IZEIL,MF)
65:      WRITE(3,160)
66:      CALL AUSG(IZEIL,IZEIL,RHR)
67:      CALL RHRGEN(IZEIL)
68:      WRITE(3,162)
69:      CALL AUSG(IZEIL,IZEIL,Y)
70:      CALL ENDE
71: 64    FORMAT(1H0,'MULTIPLE R^2 ALS KOMMUNALITAETEN? (J/N)',/)
72: 66    FORMAT(A1)
73: 68    FORMAT(1H0,'R IST FAST SINGULAER ')
74: 70    FORMAT(1H ,39HGIB STARTWERTE FUER KOMMUNALITAETEN EIN,/)
75: 80    FORMAT(1H , 'VERSION: 23. 2. 1984',/)
76: 90    FORMAT(1H0,38HFAKTORENANALYSE NACH DER MINVARMETHODE,/,
77:      &39H =====,/)
78: 100   FORMAT(1H0,'KORRELATIONSMATRIX R:',/)
79: 102   FORMAT(1H0,'ANFANGSSCHAETZUNGEN FUER KOMMUNALITAETEN:',/)
80: 104   FORMAT(1H ,F7.4)
81: 110   FORMAT(1H0,11HEIGENWERTE:,/)
82: 130   FORMAT(1H0,12HLOESUNG NACH,15,13H ITERATIONEN:,/)
83: 140   FORMAT(1H0,16HKOMMUNALITAETEN:,/)
84: 150   FORMAT(1H0,26HMATRIX DER FAKTORLADUNGEN:,/)
85: 152   FORMAT(1H0,'MATRIX DER FAKTORLADUNGEN NACH VARIMAX-ROTATIO
86: 160   FORMAT(1H0,11HMATRIX AA:',/)
87: 162   FORMAT(1H0,'RH = AA',1H',/)
88: 170   FORMAT(1H0,19HZIELFUNKTIONSWERT =,F10.5)
89:      END
90: C*****VERB*****
91:      SUBROUTINE VERB(IZEIL,MF,E,ZIEL,ITER)
92: C
93: C   UNTERPORGRAMM ZUR BESTIMMUNG DER MINVARLOESUNG
94: C   BENOETIGTE UNTERPROGRAMME: XKORR, GRAD
95: C   - ZIEL = WERT DER ZIELFUNKTION
96: C   - ITER = ANZAHL DER BENOETIGTEN ITERATIONEN
97: C
98:      DIMENSION E(20),G(20),R(20,20),Y(20,21),H(20,4),A(20,20)
99:      & ,HMIN(20),RHR(20,20)
100:      COMMON Y,R,RHR,A
101:      SCHR=0.1
102:      SCHRA=0.1
103:      ABBR=.1E-5
104:      AB10=ABBR/10.
105:      AB01=ABBR*520.
106:      ZMIN=FLOAT(IZEIL)
107:      ITER=0
108:      IT1=0
109: 10    ITER=ITER+1
110:      IT1=IT1+1
111:      DO 40 J=1,2
112:          CALL GRAD(IZEIL,MF,E,G,XNORM)
113:          IF(XNORM.LT.AB10)GOTO 72
114:          CALL XKORR(IZEIL,E)
115:          ZIEL=0.0
116:          DO 20 I=1,IZEIL
117:              H(I,4)=H(I,3)
118:              H(I,3)=H(I,2)
119:              H(I,2)=H(I,1)
120:              H(I,1)=R(I,I)

```

```

1:          R(I,I)=R(I,I)-SCHR*G(I)
2:          IF(I.GT.MF)ZIEL=ZIEL+E(I)-E(IZEIL)
3: 20      CONTINUE
4:          IF(ZIEL.GE.ZMIN)GOTO 40
5:          ZMIN=ZIEL
6:          ITM=ITER
7:          DO 30 I=1,IZEIL
8:              HMIN(I)=H(I,1)
9: 30      CONTINUE
10: 40      CONTINUE
11:          WRITE(3,42)ITER,ITM,ZIEL,ZMIN,SCHR,SCHRA
12: 42      FORMAT(1H,'IT,ITM,ZIEL,ZMIN,SCHR,SCHRA',2I4,4E11.5)
13:          IF(ITER.LT.5)GOTO 10
14:          PRUEF1=0.
15:          PRUEF2=0.
16:          XNORM=0.
17:          DO 50 I=1,IZEIL
18:              PRUEF1=PRUEF1+(H(I,1)-H(I,2))*(R(I,I)-H(I,1))
19:              PRUEF2=PRUEF2+(H(I,2)-H(I,4))*(R(I,I)-H(I,2))
20:              XNORM=XNORM+(R(I,I)-H(I,2))*(R(I,I)-H(I,2))
21: 50      CONTINUE
22:          XNORM=SQRT(XNORM)
23:          IF(PRUEF1.GT.0.0.OR.PRUEF2.LT.0.0)GOTO 70
24:          SCHR2=2.0*SCHR/XNORM
25:          IF(SCHR2.LT.1.)SCHR2=1.
26:          DO 60 I=1,IZEIL
27:              R(I,I)=R(I,I)+SCHR2*(R(I,I)-H(I,2))
28:              P=R(I,I)-E(IZEIL)-1.
29:              IF(P.GT.0.)R(I,I)=R(I,I)-P
30: 60      CONTINUE
31: 70      IF(PRUEF2.GT.0.0.OR.PRUEF1.GT.0.0)GOTO 80
32: 72      SCHR=SCHR*0.7
33:          IT1=0
34: 80      IF(IT1.GT.10)GOTO 72
35:          IF(SCHR.LT.ABBR)GOTO 90
36:          GOTO 10
37: 90      SCHRA=SCHRA*0.125
38:          IF(SCHRA.LT.AB01)GOTO 95
39:          SCHR=SCHRA
40:          GOTO 10
41: 95      DO 100 I=1,IZEIL
42:          R(I,I)=HMIN(I)
43: 100     CONTINUE
44:          CALL EIGEN(IZEIL,E)
45:          P=E(IZEIL)
46:          ZIEL=0.
47:          DO 110 I=1,IZEIL
48:              E(I)=E(I)-P
49:              R(I,I)=R(I,I)-P
50:              IF(I.GT.MF)ZIEL=ZIEL+E(I)
51: 110     CONTINUE
52:          DO 120 J=1,MF
53:              P=SQRT(E(J))
54:              DO 120 I=1,IZEIL
55:                  A(I,J)=A(I,J)*P
56: 120     CONTINUE
57:          RETURN
58:          END
59: C*****XKORR*****
60: SUBROUTINE XKORR(IZEIL,E)

```

```

81: C
82: C WIRD VON UNTERPROGRAMM VERB AUFGERUFEN
83: C KORRIGIERT LOESUNG BEI DER EIN HI**2 > 1.
84: C
85:     DIMENSION Y(20,21),R(20,20),A(20,20),E(20),RHR(20,20)
86:     COMMON Y,R,RHR,A
87:     PM=0.
88:     F=1.
89:     IT=0
90: 10  IT=IT+1
91:     PMA=PM
92:     PM=0.
93:     SUM=0.
94:     DO 20 I=1,IZEIL
95:         P=R(I,I)-E(IZEIL)-1.
96:         IF(P.LE.0.)GOTO 20
97:         IF(P.GT.PM)PM=P
98:         SUM=SUM+A(I,IZEIL)*A(I,IZEIL)
99: 20  CONTINUE
00:     IF(PM.LT..1E-4)RETURN
01:     IF(IT.GT.1.AND.PMA.NE.PM)F=F*PM/ABS(PMA-PM)
02:     IF(F.LT.1.)F=1.
03:     IF(F.GT.7..OR.PMA.EQ.PM)F=7.
04:     FAKT=F*PM/(1.-SUM)
05:     DO 30 I=1,IZEIL
06:         P=R(I,I)-E(IZEIL)-1.
07:         IF(P.GT.0.)R(I,I)=R(I,I)-P
08:         IF(P.LT.0.)R(I,I)=R(I,I)+FAKT*A(I,IZEIL)*A(I,IZEIL)
09: 30  CONTINUE
10:     CALL EIGEN(IZEIL,E)
11:     WRITE(3,40)PM
12:     GOTO 10
13: 40  FORMAT(1H , ' XKORR: PMAX = ',E10.4)
14:     END
15: C*****GRAD*****
16:     SUBROUTINE GRAD(IZEIL,MF,E,G,XNORM)
17: C
18: C WIRD VON UNTERPROGRAMM VERB AUFGERUFEN
19: C BESTIMMT GRADIENTEN DER ZIELFUNKTION
20: C - G      = GRADIENT
21: C - XNORM  = LAENGE DES GRADIENTEN
22: C
23:     DIMENSION Y(20,21),R(20,20),A(20,20),E(20),G(20),RHR(20,20)
24:     COMMON Y,R,RHR,A
25:     CALL EIGEN(IZEIL,E)
26:     MF1=MF+1
27:     XNORM=0.
28:     DO 20 I=1,IZEIL
29:         G(I)=FLOAT(MF-IZEIL)*A(I,IZEIL)*A(I,IZEIL)
30:         DO 10 J=MF1,IZEIL
31:             G(I)=G(I)+A(I,J)*A(I,J)
32: 10  CONTINUE
33:         XNORM=XNORM+G(I)*G(I)
34: 20  CONTINUE
35:     XNORM=SQRT(XNORM)
36:     DO 30 I=1,IZEIL
37:         G(I)=G(I)/XNORM
38: 30  CONTINUE
39:     RETURN
40:     END

```

```

: C*****AAGEN*****
:       SUBROUTINE AAGEN(IZ,IS)
: C
: C   BILDET A*A'
: C   IZ = ANZAHL DER VARIABLEN
: C   IS = ANZAHL DER SPALTEN VON A (= ANZAHL DER BISHER
: C       EXTRAHIERTEN FAKTOREN)
: C   A  = MATRIX DER FAKTORLADUNGEN
: C   RHR= A*A'
: C
:       DIMENSION A(20,20),RH(20,20),Y(20,21),RHR(20,20)
:       COMMON Y,RH,RHR,A
:       DO 10 I=1,IZ
:         DO 10 J=1,IZ
:           RHR(I,J)=0.0
:         DO 10 K=1,IS
:           RHR(I,J)=RHR(I,J)+A(I,K)*A(J,K)
:       10 CONTINUE
:       RETURN
:       END
: C*****AUSG*****
:       SUBROUTINE AUSG(IZEIL,ISPALT,TAB)
: C
: C   AUSGABE EINER MATRIX TAB MIT IZEIL (MAXIMAL 50) ZEILEN UND
: C   ISPALT (MAXIMAL 10) SPALTEN
: C
:       DIMENSION TAB(20,20),AUS(20),RH(20,20),Y(20,21),
: &A(20,20),RHR(20,20)
:       COMMON Y,RH,RHR,A
:       DO 10 I=1,IZEIL
:         IF(IZEIL.LE.12)WRITE(3,20) (TAB(I,J),J=1,ISPALT)
:         IF(IZEIL.GT.12)WRITE(3,30) (TAB(I,J),J=1,ISPALT)
:       10 CONTINUE
:       RETURN
:       20 FORMAT(1H ,12F7.4)
:       30 FORMAT(1H ,20F6.4)
:       END
: C*****EIGEN*****
:       SUBROUTINE EIGEN(IZEIL,E)
: C
: C   BESTIMMEN DER EIGENWERTE UND -VEKTOREN EINER SYMMETRISCHEN MATRIX
: C   NACH DEM JACOBI-VERFAHREN (S. ZURMUEHL: MATRIZEN, S. 308FF)
: C   - R = MATRIX, DEREN EIGENWERTE BESTIMMT WERDEN
: C   - E = VEKTOR DER EIGENWERTE IN ABSTEIGENDER REIHENFOLGE
: C   - A = MATRIX DER EIGENVEKTOREN (ORTHONORMIERT)
: C
:       DIMENSION R(20,20),E(20),A(20,20),W(20,21),D(20),RI(20,20)
:       COMMON W,R,RI,A
:       IZ=IZEIL-1
:       DO 20 I=1,IZEIL
:         DO 10 J=I,IZEIL
:           A(I,J)=0.
:           A(J,I)=0.
:           W(I,J)=R(I,J)
:         10 CONTINUE
:         A(I,I)=1.
:         E(I)=R(I,I)
:       20 CONTINUE
:       30 ELMAX=0.0
:       DO 40 I=1,IZ

```

```

301:         IW=I+1
302:         DO 40 J=IW,IZEIL
303:             AM=ABS(W(I,J))
304:             IF(AM.LE.ELMAX)GOTO 40
305:             ELMAX=AM
306:             I1=I
307:             I2=J
308: 40 CONTINUE
309:         IF(ELMAX.LT..1E-4)GOTO 70
310:         IF(ABS(E(I1)-E(I2)).LT..1E-4)GOTO 90
311:         T=2.*W(I1,I2)/(E(I1)-E(I2))
312:         FK=.5/SQRT(1.+T*T)
313:         C=SQRT(.5+FK)
314:         S=SQRT(.5-FK)*T/ABS(T)
315: 50 DO 60 I=1,IZEIL
316:             ZWERT=C*A(I,I1)+S*A(I,I2)
317:             A(I,I2)=S*A(I,I1)-C*A(I,I2)
318:             A(I,I1)=ZWERT
319:             IF(I.EQ.I1.OR.I.EQ.I2)GOTO 60
320:             IK1=MIN0(I,I1)
321:             IK2=MIN0(I,I2)
322:             IG1=I+I1-IK1
323:             IG2=I+I2-IK2
324:             ZWERT=C*W(IK1,IG1)+S*W(IK2,IG2)
325:             W(IK2,IG2)=S*W(IK1,IG1)-C*W(IK2,IG2)
326:             W(IK1,IG1)=ZWERT
327: 60 CONTINUE
328:             ZWERT=C*C*E(I1)+S*S*E(I2)+2.*C*S*W(I1,I2)
329:             E(I2)=S*S*E(I1)+C*C*E(I2)-2.*C*S*W(I1,I2)
330:             E(I1)=ZWERT
331:             W(I1,I2)=0.
332:             GOTO 30
333: 70 IPR=0
334:         DO 80 I=1,IZ
335:             IW=I+1
336:             IF(E(I).GE.E(IW))GOTO 80
337:             IPR=1
338:             ZWERT=E(I)
339:             E(I)=E(IW)
340:             E(IW)=ZWERT
341:             DO 80 J=1,IZEIL
342:                 ZWERT=A(J,I)
343:                 A(J,I)=A(J,IW)
344:                 A(J,IW)=ZWERT
345: 80 CONTINUE
346:             IF(IPR.EQ.1)GOTO 70
347:             RETURN
348: 90 C=.7071068
349:             S=C*W(I1,I2)/ABS(W(I1,I2))
350:             GOTO 50
351:         END
352: C*****REING*****
353:         SUBROUTINE REING(IZEIL,MF)
354: C
355: C     EINGABE DER KORRELATIONSMATRIX
356: C     ES MUESSEN NUR DIE KORRELATIONEN RECHTS OBERHALB DER HAUPT-
357: C     DIAGONALEN EINGEGEBEN WERDEN.
358: C     KORRELATIONSMATRIX WIRD AUCH IN RHR ABGESPEICHERT
359: C     IZEIL = ANZAHL DER VARIABLEN (MAXIMAL 10)
360: C     R      = KORRELATIONSMATRIX

```

```

C MF      = ANZAHL DER FAKTOREN
C
      DIMENSION E(20),R(20,20),Y(20,21),RHR(20,20),A(20,20)
      COMMON Y,R,RHR,A
      WRITE(3,30)
1  CALL INWERT(3,0,IZEIL,1,0)
      IF(IZEIL.GE.2.AND.IZEIL.LE.20)GOTO 4
      WRITE(3,2)
2  FORMAT(1H0,'ES MUSS SEIN: 1 < VARIABLENZAHL < 21 !!!!!',/,
+' EINGABE WIEDERHOLEN !!!!!',/)
      GOTO 1
4  WRITE(3,32)
      CALL INWERT(3,0,MF,1,0)
      IF(MF.GE.1.AND.MF.LT.IZEIL)GOTO 6
      WRITE(3,5)
5  FORMAT(1H0,'ES MUSS SEIN: 1 <= FAKTORENZAHL <= VARIABLENZAHL !!!!!',
+' EINGABE WIEDERHOLEN !!!!!',/)
      GOTO 4
6  WRITE(3,40)
      R(1,1)=1.
      DO 20 I=2,IZEIL
          I1=I-1
8  WRITE(3,50)I1
          IANZ=IZEIL-I1
          CALL INWERT(3,E,0,IANZ,1)
          DO 9 J=1,IANZ
              IF(E(J).GE.-1.AND.E(J).LE.1.)GOTO 9
              WRITE(3,10)
10  FORMAT(1H0,' ES MUSS SEIN: -1 <= KORRELATIONSKOEFFIZIENT <= 1 !!!!!',
+' ,/, ' EINGABE WIEDERHOLEN !!!!!',/)
              GOTO 8
9  CONTINUE
      DO 12 J=I,IZEIL
          K=J-I+1
          R(I1,J)=E(K)
          R(J,I1)=E(K)
          RHR(I1,J)=E(K)
          RHR(J,I1)=E(K)
12  CONTINUE
          R(I,I)=1.
          RHR(I,I)=1.
20  CONTINUE
      RETURN
30  FORMAT(1H , 'GIB EIN: ANZAHL DER VARIABLEN',/)
32  FORMAT(1H , 'GIB EIN: ANZAHL DER FAKTOREN',/)
40  FORMAT(1H , '47HGIB KORRELATIONEN RECHTS OBERHALB DIAGONALE EIN,/)
50  FORMAT(1H , I2, 7H.ZEILE: ,/)
      END
C *****RHRGEN*****
      SUBROUTINE RHRGEN(IZ)
C
C  ERRECHNET REST-RH = RH - A*A'
C  IZ  = ANZAHL DER VARIABLEN (MAXIMAL 10)
C  RH  = REPRODUZIERTE KORRELATIONSMATRIX
C  AA  = A*A' (A=MATRIX DER FAKTORLADUNGEN)
C
      DIMENSION RH(20,20),AA(20,20),A(20,20),RHR(20,21)
      COMMON RHR,RH,AA,A
      DO 10 I=1,IZ
          DO 10 J=1,IZ

```

```

421:          RHR(I,J)=RH(I,J)-AA(I,J)
422:          IF (ABS(RHR(I,J)).LT..0001) RHR(I,J)=.0
423: 10 CONTINUE
424:      RETURN
425:  END
426: C*****SINV*****
427:      SUBROUTINE SINV(IZEIL)
428: C
429: C      BILDET DIE INVERSE EINER MATRIX, DEREN DIAGONALELEMENTE
430: C      VON NULL VERSCHIEDEN SIND
431: C      IZEIL = SPALTENZAHL = ZEILENZAHl DER MATRIX
432: C      R      = ZU INVERTIERENDE MATRIX
433: C      RI     = INVERTIERTE MATRIX
434: C      DETER  = DETERMINANTE
435: C
436:      DIMENSION R(20,20),A(20,20),RI(20,20),WORK(20,21)
437:      COMMON WORK,R,RI,A
438:      ISP=IZEIL+1
439:      IZE=IZEIL-1
440:      DO 40 I=1,IZEIL
441:          DO 20 J=1,IZEIL
442:              DO 10 K=1,IZEIL
443:                  WORK(J,K)=R(J,K)
444: 10          CONTINUE
445:              WORK(J,ISP)=0.
446:              IF(I.EQ.J)WORK(J,ISP)=1.
447: 20          CONTINUE
448:              DO 30 J=1,IZE
449:                  IS=J+1
450:                  DO 30 K=IS,IZEIL
451:                      FAKT=WORK(K,J)/WORK(J,J)
452:                      DO 30 L=J,ISP
453:                          WORK(K,L)=WORK(K,L)-WORK(J,L)*FAKT
454: 30          CONTINUE
455:              DO 40 J=1,IZEIL
456:                  IZ=IZEIL-J+1
457:                  RI(I,IZ)=WORK(IZ,ISP)/WORK(IZ,IZ)
458:                  IK=IZEIL-J
459:                  IF(IK.LT.1)GOTO 40
460:                  DO 40 K=1,IK
461:                      WORK(K,ISP)=WORK(K,ISP)-WORK(K,IZ)*RI(I,IZ)
462: 40          CONTINUE
463:      RETURN
464:  END
465: C*****DETER*****
466:      SUBROUTINE DETER(IZEIL,DET)
467: C
468: C      ERRECHNET DIE DETERMINANTE EINER MATRIX, DEREN DIAGONALELEMENTE
469: C      VON NULL VERSCHIEDEN SIND
470: C      IZEIL = SPALTENZAHL = ZEILENZAHl
471: C      TAB   = MATRIX, DEREN DETERMINANTE BERECHNET WERDEN SOLL
472: C      DET   = WERT DER DETERMINANTE
473: C
474:      DIMENSION TAB(20,20),WORK(20,20),A(20,20),Y(20,21)
475:      COMMON Y,TAB,WORK,A
476:      DO 10 I=1,IZEIL
477:          DO 10 J=1,IZEIL
478:              WORK(I,J)=TAB(I,J)
479: 10          CONTINUE
480:      IZ=IZEIL-1

```

```

81:      DO 20 I=1,IZ
82:          IS=I+1
83:          DO 20 J=IS,IZEIL
84:              FAKT=WORK(J,I)/WORK(I,I)
85:              DO 20 K=I,IZEIL
86:                  WORK(J,K)=WORK(J,K)-WORK(I,K)*FAKT
87: 20 CONTINUE
88:      DET=1.0
89:      DO 30 I=1,IZEIL
90:          DET=DET*WORK(I,I)
91: 30 CONTINUE
92:      RETURN
93:      END
94: C*****INPUT*****
95:      SUBROUTINE INPUT(IK,IBUF)
96: C
97: C      SUBROUTINE WIRD VON INWERT AUFGERUFEN
98: C
99:      DIMENSION RH(20,20),A(20,20),Y(20,21),RHR(20,20)
100:      LOGICAL IBUF(1),LEER
101:      COMMON Y,RH,RHR,A
102:      DATA LEER/1H /
103:      DO 10 I=1,80
104: 10 IBUF(I) = LEER
105:      READ(IK,40,ERR=20,END=30) (IBUF(I),I=1,80)
106:      GO TO 30
107: 20 WRITE(3,50)
108: 30 RETURN
109: 40 FORMAT(80A1)
110: 50 FORMAT(13H LESEFEHLER !)
111:      END
112: C*****INWERT*****
113:      SUBROUTINE INWERT(IK,WERT,IWERT,N,IFO)
114: C
115: C      DIENST ZUM FORMATFREIEN EINLESEN VON ZAHLEN
116: C      IK = KANAL, UEBER DEN EINGELESEN WERDEN SOLL (BILDSCHIRM: IK=3)
117: C      WERT = NAME EINES REAL-ZAHLEN-VEKTORS
118: C      IWERT = NAME EINES INTERGER-ZAHLEN-VEKTORS
119: C      N = ANZAHL DER EINZULESENDEN WERTE
120: C      IFO = 0, WENN INTEGERWERTE EINZULESEN SIND
121: C           = 1, WENN REALWERTE EINZULESEN SIND
122: C
123:      DIMENSION WERT(1),IWERT(1),A(20,20),RH(20,20),Y(20,21)
124:      &,RHR(20,20)
125:      LOGICAL IBUF(80),IFOR1(6),INS(2),LEER,IPUNKT,KBUF(10)
126:      LOGICAL KOMMA,IFOR2(4)
127:      COMMON Y,RH,RHR,A
128:      DATA IFOR1,LEER,IPUNKT/1H(,1HF,1HO,1H.,1HO,1H),1H ,1H./
129:      DATA KOMMA,IFOR2/1H,,1H(,1HI,1HO,1H)/
130: C
131:      IZ = 0
132: 10 CALL INPUT(IK,IBUF)
133:      IF(IFO.EQ.1) GO TO 40
134:      DO 30 I=1,80
135:          IF(IBUF(I).NE.IPUNKT.AND.IBUF(I).NE.KOMMA) GO TO 30
136:          DO 20 II=1,N
137: 20      IWERT(II) = 0
138:      RETURN
139: 30 CONTINUE
140: 40 IA = 1

```

```

541:      50 IL = 0
542:         IP = -1
543:         IPP = 0
544:         DO 60 I=IA,80
545:            IF(IBUF(I).EQ.KOMMA) IBUF(I) = IPUNKT
546:            IF(IBUF(I).EQ.IPUNKT) IPP = 1
547:            IF(IBUF(I).EQ.LEER) GO TO 70
548:            IL = IL + 1
549:            IP = IP + IPP
550:         60 KBUF(IL) = IBUF(I)
551:         70 IF(IL.NE.0) GO TO 80
552:            IA = IA + 1
553:            IF(IA.LE.80) GO TO 50
554:            GO TO 10
555:         80 IZ = IZ + 1
556:            IF(IPP.EQ.1.OR.IFO.EQ.0) GO TO 90
557:            IE = IA + IL
558:            IP = 0
559:            IL = IL + 1
560:            KBUF(IL) = IPUNKT
561:            IAA = IA
562:            IA = IE + 1
563:            GO TO 100
564:         90 IE = IA + IL - 1
565:            IAA = IA
566:            IA = IE + 2
567:         100 IF(IFO.EQ.1) ENCODE(INS,120) IL,IP
568:            IF(IFO.EQ.0) ENCODE(INS,120) IL
569:            IFOR1(3) = INS(1)
570:            IFOR1(5) = INS(2)
571:            IFOR2(3) = INS(1)
572:            IF(IFO.EQ.1) DECODE(KBUF,IFOR1) WERT(IZ)
573:            IF(IFO.EQ.0) DECODE(KBUF,IFOR2) IWERT(IZ)
574:            IF(IZ.EQ.M.OR.IZ.EQ.0) GO TO 110
575:            IF(IA.GT.80) GO TO 10
576:            GO TO 50
577:         110 RETURN
578:         120 FORMAT(2I1)
579:         END
580: C*****ROTAT*****
581:         SUBROUTINE ROTAT(IZEIL,MF,V)
582: C
583: C FUEHRT VARIMAXROTATION DURCH
584: C NORMIERT FAKTORLADUNGEN SO, DASS
585: C 1. DER ERSTE FAKTOR AM MEISTEN VARIANZ ERKLAERT USF.
586: C 2. DIE ERSTE FAKTORLADUNG JEDES FAKTORS > 0 (WENN = 0, DANN DIE ZWEITE)
587: C V = VARIMAXKRITERIUM
588: C
589:         DIMENSION RH(20,20),A(20,20),Y(20,21),RHR(20,20),E(20)
590:         COMMON Y,RH,RHR,A
591:         IF(MF.EQ.1)GOTO 70
592:         V=0.
593:         MF1=MF-1
594:         FIZEIL=FLOAT(IZEIL)
595:         10 SJ1=0.
596:            SJ2=0.
597:            DO 30 J=1,MF
598:               SI1=0.
599:               SI2=0.
600:               DO 20 I=1,IZEIL

```

```

501:          SI2=SI2+A(I,J)*A(I,J)/RH(I,I)
502:          SI1=SI1+SI2*SI2
503: 20      CONTINUE
504:          SJ1=SJ1+SI1
505:          SJ2=SJ2+SI2*SI2
506: 30      CONTINUE
507:          VA=V
508:          V=FIIZEIL*SJ1-SJ2
509:          P=ABS(V-VA)
510:          IF(P.LT..0001)GOTO 70
511:          DO 60 IP=1,MF1
512:              IP1=IP+1
513:              DO 60 IQ=IP1,MF
514:                  F=0.
515:                  B=0.
516:                  C=0.
517:                  D=0.
518:                  DO 40 I=1,IZEIL
519:                      UI=A(I,IP)*A(I,IP)/RH(I,I)-A(I,IQ)*A(I,IQ)/RH(I,I)
520:                      VI=2.*A(I,IP)*A(I,IQ)/RH(I,I)
521:                      F=F+UI
522:                      B=B+VI
523:                      C=C+UI*UI-VI*VI
524:                      D=D+2.*UI*VI
525: 40      CONTINUE
526:          ZZ=D-2.*F*B/FIIZEIL
527:          ZN=C-(F*B-B*B)/FIIZEIL
528:          IF(ZN.NE.0.)T4A=ZZ/ZN
529:          IF(ZN.EQ.0.)T4A=100.
530:          AL4=ATAN(T4A)
531:          IF(ZZ.GE.0..AND.T4A.GE.0.)AD=0.
532:          IF(ZZ.GE.0..AND.T4A.LT.0.)AD=3.1415927
533:          IF(ZZ.LT.0..AND.T4A.GE.0.)AD=3.1415927
534:          IF(ZZ.LT.0..AND.T4A.LT.0.)AD=6.2831853
535:          AL=(AL4+AD)/4.
536:          DO 50 I=1,IZEIL
537:              ZWERT=A(I,IP)*COS(AL)+A(I,IQ)*SIN(AL)
538:              A(I,IQ)=-A(I,IP)*SIN(AL)+A(I,IQ)*COS(AL)
539:              A(I,IP)=ZWERT
540: 50      CONTINUE
541: 60      CONTINUE
542:          IF(MF.GT.2)GOTO 10
543: 70      DO 80 J=1,MF
544:          IF(A(1,J).GT.0.)GOTO 80
545:          IF(A(1,J).EQ.0..AND.A(2,J).GT.0.)GOTO 80
546:          DO 80 I=1,IZEIL
547:              A(I,J)=A(I,J)*(-1.)
548: 80      CONTINUE
549:          IF(MF.EQ.1)RETURN
550:          DO 90 J=1,MF
551:              E(J)=0.
552:              DO 90 I=1,IZEIL
553:                  E(J)=E(J)+A(I,J)*A(I,J)
554: 90      CONTINUE
555: 100     IP=0
556:          DO 110 J=1,MF1
557:              J1=J+1
558:              IF(E(J1).LE.E(J))GOTO 110
559:              IP=1
560:              DO 110 I=1,IZEIL

```

```
661:         ZWERT=A(I,J1)
662:         A(I,J1)=A(I,J)
663:         A(I,J)=ZWERT
664: 110 CONTINUE
665:     IF(IP.EQ.1.AND.MF.GT.2)GOTO 100
666:     RETURN
667:     END
```

TABELLARISCHER LEBENS LAUF

Name : Wildner, Raimund Karl
Talblick 3
3510 Fürth

Familienstand: verheiratet, ein Kind

Geburtsdatum : 9. April 1955

Geburtsort : Hof/Saale

Vater : Erich Wildner, Sozialberater
Mutter : Frieda Wildner, geb. Strobl, verstorben 1961. 1962 Heirat des Vaters mit Lieselotte Fleischmann.

Schule : 1961-1965 Volksschule
1965-1974 Dürer-Gymnasium Nürnberg
Abschluß mit Abitur.

Wehrdienst : Zeitsoldat von Juli 1974 bis März 1975; Ausbildung zum Reserveoffizier.

Studium : Sommersemester 1976 bis einschließlich Sommersemester 1980 Wirtschafts-
pädagogik an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen/Nürnberg.
Diplom-Prüfung zum Diplom-Handelslehrer im November 1980.

Beruf : Seit November 1980 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Statistik II der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen/Nürnberg (Lehrstuhlinhaber Prof. Dr. H. Schneeberger).

Promotion : 17. Juli 1984 zum Dr. rer. pol.





